FONCTIONS LINEAIRES

1 Proportionnalité : y = ax

1. Si l'on sait que les valeurs de y sont proportionnelles à celles de x, alors il existe un nombre « fixe » a tel que y = ax.
2. Et réciproquement, s'il existe un nombre « fixe » a tel que y = ax, alors les valeurs de y sont proportionnelles à celles de x.

Exemple : vitesse moyenne en km/h et en m/s.
Soit un mobile parcourant une distance d à une vitesse moyenne v pendant une durée t.
La distance est proportionnelle au temps : d = v×t (c'est une grandeur produit).
On a aussi bien sûr : v = $\frac{d}{t}$ et t = $\frac{d}{v}$ (ce sont des grandeurs quotients).
La vitesse s'exprime en général en km/h ou en m/s.
Comme 1 heure = 3600 s et 1 km = 1000 m, $\frac{3600}{1000}$ = 3,6 alors :
Pour passer des m/s aux km/h, on multiplie par 3,6.
Pour passer des km/h aux m/s, on divise par 3,6.
Par exemple : un cycliste roulant à 18m/s roule à 18×3,6 = 64,8 km/h.
Un piéton se déplaçant à 9,9 km/h de moyenne marche à une vitesse de 9,9÷3,6 = 2,75 m/s.
Remarque : les unités m/s et km/h s'écrivent également $m.s^{-1}$ et $km.h^{-1}$.

2 Fonctions linéaires

- Définition :

a étant un nombre « fixe », lorsqu'à chaque nombre x, on associe le nombre ax, on définit **la fonction linéaire de coefficient *a*.**
ax est appelé **l'image** de x.

La fonction linéaire de coefficient a que l'on peut noter : $x \rightarrow ax$ est souvent notée par une lettre, f en général, et l'image de x est alors $f(x)$ et on a : $f(x) = ax$.

Exemple : Soit la fonction linéaire f de coefficient 3.
Elle se note : $f : x \rightarrow 3x$ et on a : $f(x) = 3x$.
L'image de –2 par f est : $f(-2) = 3\times(-2) = -6$.

- Fonctions linéaires et pourcentages :

Calculer (augmenter ou diminuer) un pourcentage d'un nombre, c'est en fait utiliser une fonction linéaire. Par exemple :

- Augmenter x de 5 %, c'est calculer $x + \frac{5}{100}x = \frac{100}{100}x + \frac{5}{100}x = \frac{105}{100}x = 1{,}05x$, c'est-à-dire considérer la fonction linéaire g de coefficient 1,05 ; $g(x) = 1{,}05x$.
  Augmenter, par exemple, 6000 de 5 % revient à calculer $g(6000) = 1{,}05\times6000 = 6300$.
- Diminuer x de 13 %, c'est calculer $x - \frac{13}{100}x = \frac{100}{100}x - \frac{13}{100}x = \frac{87}{100}x = 0{,}87x$, c'est-à-dire considérer la fonction linéaire h de coefficient 0,87 ; $h(x) = 0{,}87x$.
  Diminuer, par exemple, 150 de 13 % revient à calculer $h(150) = 0{,}87\times150 = 130{,}5$.

Propriété

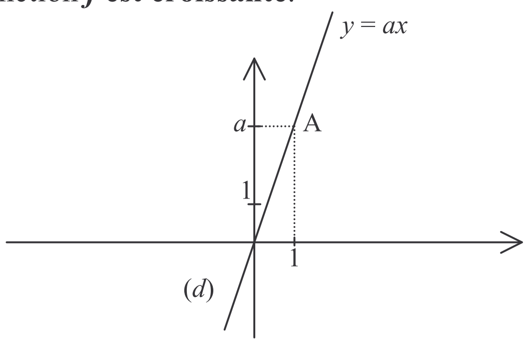
Augmentation d'une valeur initiale x de t % : la fonction linéaire donnant la nouvelle valeur est f avec $\boldsymbol{f(x) = (1 + \frac{t}{100})}\,x$
Diminution d'une valeur initiale x de t % : la fonction linéaire donnant la nouvelle valeur est g avec $\mathbf{g(}\boldsymbol{x}\mathbf{) = (1 - \frac{t}{100})}\,x$

Application : Une somme de 10 000 € est placée à un taux annuel de 5%
La fonction linéaire donnant le nouveau capital est f avec $f(x) = (1 + \frac{5}{100})x = 1{,}05x$
$x = 10\,000$ donc $f(10\,000) = 1{,}05 \times 10\,000 = 10\,500$ **Capital au bout d'un an : 10 500 €**

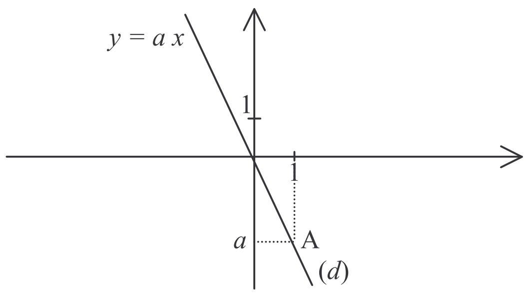
3 Représentation graphique d'une fonction linéaire

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire f de coefficient a est la droite (d) passant par l'origine O du repère et par le point A(1 ; a). On dit alors que cette droite a pour équation : $y = ax$, a étant appelé **le coefficient directeur** de cette droite.

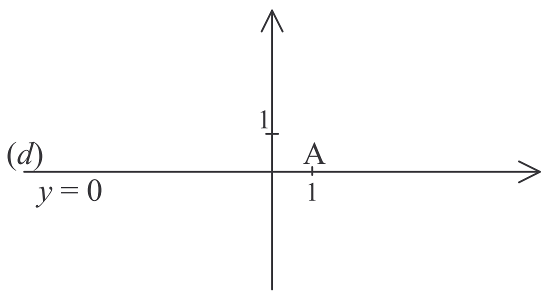
- Si $\boldsymbol{a > 0}$, alors la fonction ***f* est croissante**.



- Si $\boldsymbol{a < 0}$, alors la fonction ***f* est décroissante**



- Si $\boldsymbol{a = 0}$, alors la droite (d) est l'axe des abscisses, f est la fonction nulle : $f : x \to 0$, c'est-à-dire que tout nombre x a pour image 0.



Remarque : Toute droite passant par l'origine O, sauf l'axe des ordonnées, est la représentation graphique d'une fonction linéaire.