BREVET BLANC – 24 Janvier2006 Collège des Ponts Jumeaux		
Epreuve : MATHEMATIQUES		**Durée : 2 heures**

L'emploi des calculatrices est autorisé

Toutes les étapes des calculs doivent être précisées

QUATRE POINTS SONT ATTRIBUES A L'ORTHOGRAPHE ET A LA PRESENTATION

1ère Partie : Activités numériques — 12 points

Exercice 1

On considère les nombres :

$A = \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{7}\right)$ $\quad B = \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{5}\right) : \left(\frac{8}{5} + \frac{7}{9}\right)$ $\quad C = \frac{36 \times 10^{-4} \times 22 \times 10^{3}}{33 \times 10^{2} \times 30 \times 10^{-3}}$

Calculer A, B et C. On écrira chaque résultat sous la forme de fractions aussi simples que possible.

Exercice 2

On considère les nombres :

$D = 3\sqrt{112} + \frac{1}{2}\sqrt{175} - 8\sqrt{7}$ $\quad E = (2 + 3\sqrt{7})^2 - 5(3 - 5\sqrt{7})^2$

Calculer D et E. On écrira les résultats sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont deux nombres à déterminer.

Exercice 3

On considère l'expression : $F = -4(2x + 11) - (4x^2 - 121)$

1. Développer et réduire et ordonner F.
2. Factoriser : $4x^2 - 121$ puis factoriser F
3. Résoudre l'équation $(2x + 11)(7 - 2x) = 0$

Exercice 4

1) Résoudre l'inéquation : $7x - \frac{2}{3} \leq 4x - \frac{5}{3}$.
2) Représenter graphiquement les solutions sur une droite graduée.

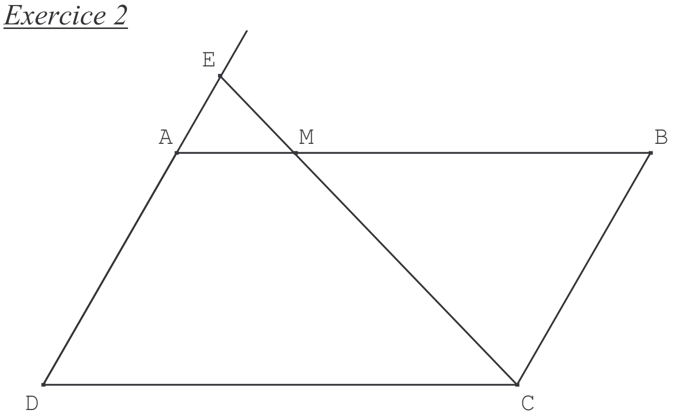
2ème Partie : Activités géométriques — 12 points

Exercice 1

On considère le triangle ABC rectangle en A avec AC = 4,8 cm et AB = 6,4 cm.

1) Construire le triangle ABC.
2) Calculer BC.
3) Déterminer, au degré près, une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
4) Tracer la droite (*d*) perpendiculaire en C à la droite (BC) ; elle coupe la droite (AB) en E.
5) a) Exprimer de deux façons différentes tan $\widehat{B}$: dans le triangle ABC, puis dans le triangle BCE.
   b) En déduire que EC = 6 cm.

Exercice 2



ABCD est un parallélogramme :
AB = 8 cm AD = 4,5 cm

E est le point de (AD) tel que AE = 1,5 cm et
E n'est pas sur le segment [AD]

La droite (EC) coupe le segment [AB] en M

1) Calculer AM.

2) N est le point du segment [DC] tel que DN = $\frac{3}{4}$ DC

Démontrer que les droites (AN) et (EC) sont parallèles.

3$^{\text{ème}}$ Partie : Problème 12 points

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) gradué en centimètre, placer les points :

   A(6 ; 5) B(2 ; – 3) C(– 4 ; 0).

2) Calculer les distances AB, BC et CA. (donner les résultats exacts sous la forme $a\sqrt{5}$)

3) En déduire la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.

4) Calculer l'aire du triangle ABC.

5) Calculer la valeur exacte du périmètre du triangle ABC donnée sous la forme $a\sqrt{5}$, puis la valeur arrondie au centième près de ce résultat.

6) On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Préciser la position de son centre E en justifiant la réponse.
   Donner, en lisant sur le graphique, les coordonnées de E.
   b) Déterminer la valeur exacte du rayon de ce cercle puis sa valeur arrondie au dixième.

7) Calculer la valeur exacte de tan $\widehat{ACB}$ puis une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

8) Tracer la droite (BE) qui recoupe le cercle en D. Donner, en lisant sur le graphique, les coordonnées de D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Corrigé Brevet Blanc 24/01/06

Partie numérique

Exercice 1

$$A = \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{7}\right)$$
$$A = \left(\frac{10}{35} - \frac{21}{35}\right) \times \left(\frac{7}{35} - \frac{45}{35}\right)$$
$$A = -\frac{11}{35} \times \left(\frac{-38}{35}\right)$$
$$A = \frac{418}{1225}$$

$$B = \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{5}\right) : \left(\frac{8}{5} + \frac{7}{9}\right)$$
$$B = \left(\frac{5}{45} - \frac{27}{45}\right) : \left(\frac{72}{45} + \frac{35}{45}\right)$$
$$B = -\frac{22}{45} : \frac{107}{45}$$
$$B = -\frac{22}{45} \times \frac{45}{107}$$
$$B = -\frac{22}{107}$$

$$C = \frac{36 \times 10^{-4} \times 22 \times 10^{3}}{33 \times 10^{2} \times 30 \times 10^{-3}}$$
$$C = \frac{6 \times 2 \times 3 \times 2 \times 11 \times 10^{-1}}{3 \times 11 \times 6 \times 5 \times 10^{-1}}$$
$$C = \frac{4}{5}$$

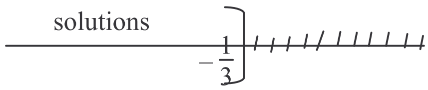
Exercice 3

1) $F = -4(2x + 11) - (4x^2 - 121)$
   $F = -8x - 44 - 4x^2 + 121$
   $F = -4x^2 - 8x + 77$
2) $4x^2 - 121 = (2x)^2 - 11^2 = (2x + 11)(2x - 11)$
   $F = -4(2x + 11) - (4x^2 - 121)$
   $F = -4(2x + 11) - (2x + 11)(2x - 11)$
   $F = (2x + 11)[-4 - (2x - 11)]$
   $F = (2x + 11)[-4 - 2x + 11]$
   $F = (2x + 11)(7 - 2x)$
3) $(2x + 11)(7 - 2x) = 0$
   Si un produit est nul alors un des 2 facteurs est nul
   donc $2x + 11 = 0$ ou $7 - 2x = 0$
   donc $x = -\frac{11}{2}$ ou $x = \frac{7}{2}$
   D'où les solutions $-\frac{7}{2}$ et $\frac{1}{2}$

Exercice 4

$$7x - \frac{2}{3} \leq 4x - \frac{5}{3}$$
$$7x - 4x \leq -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}$$
$$3x \leq -\frac{3}{3}$$
$$3x \leq -1$$
$x \leq -\frac{1}{3}$ (on divise par 3 nombre **positif**)

Les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à $-\frac{1}{3}$



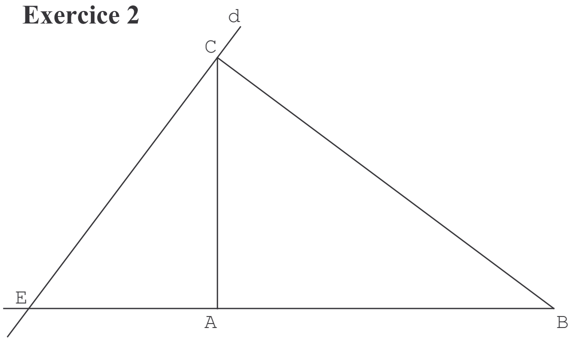
Exercice 2

$$D = 3\sqrt{112} + \frac{1}{2}\sqrt{175} - 8\sqrt{7}$$
$$D = 3\sqrt{16 \times 7} + \frac{1}{2}\sqrt{25 \times 7} - 8\sqrt{7}$$
$$D = 12\sqrt{7} + \frac{5}{2}\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$$
$$D = \frac{13}{2}\sqrt{7}$$

$$E = (2 + 3\sqrt{7})^2 - 5(3 - 5\sqrt{7})^2$$
$$E = 4 + 12\sqrt{7} + 63 - 5(9 - 30\sqrt{7} + 175)$$
$$E = 67 + 12\sqrt{7} - 45 + 150\sqrt{7} - 875$$
$$E = -853 + 162\sqrt{7}$$

Partie géométrique

Exercice 2



ABC triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2$
$BC^2 = 64$
BC = 8 (BC est une distance) donc $\boxed{BC = 8 \text{ cm}}$

3) ABC triangle rectangle donc on peut utiliser la trigonométrie
$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{6{,}4}{4{,}8} = \frac{4}{3}$ La calculatrice donne $\boxed{\widehat{ACB} \approx 53°}$

4) a) Dans le triangle rectangle ABC $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$

   Dans le triangle rectangle BCE $\tan \widehat{B} = \frac{CE}{BC} = \frac{CE}{8}$

   b) D'après a) $\tan \widehat{B} = \frac{3}{4}$ et $\tan \widehat{B} = \frac{CE}{8}$ donc $\frac{3}{4} = \frac{CE}{8}$ donc $CE = \frac{3 \times 8}{4} = 6$ donc $\boxed{CE = 6 \text{ cm}}$

Exercice 1

1) E, M, C alignés ainsi que E, A, D, les droites (AM) et (DC) sont parallèles (ABCD parallélogramme) donc d'après le théorème de Thalès $\frac{EA}{ED} = \frac{EM}{EC} = \frac{AM}{DC}$

$\frac{EA}{ED} = \frac{AM}{DC}$ donc $\frac{1{,}5}{1{,}5+4{,}5} = \frac{AM}{8}$ donc $\frac{1{,}5}{6} = \frac{AM}{8}$ donc $AM = \frac{8 \times 1{,}5}{6} = 2$ donc $\boxed{AM = 2 \text{ cm}}$

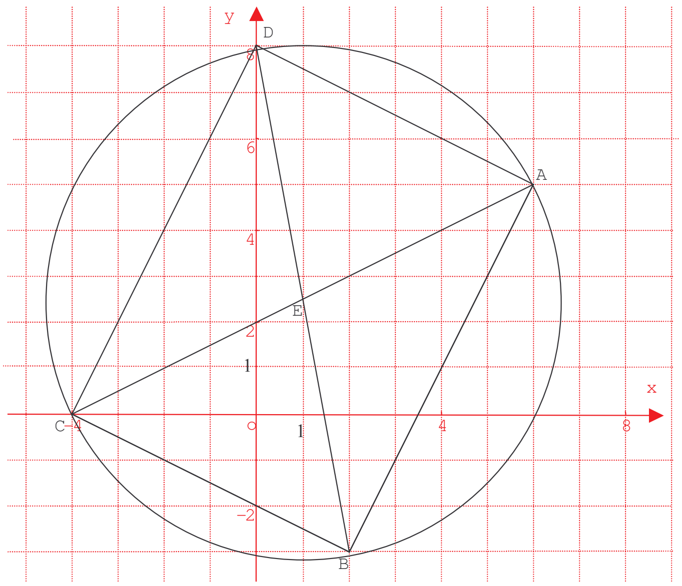
2) Comparons les rapports $\frac{DA}{DE}$ et $\frac{DN}{DC}$

$\frac{DA}{DE} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

$\frac{DN}{DC} = \frac{3}{4}$

Les points D, A, E sont alignés et dans le même ordre que D, N, C et $\frac{DA}{DE} = \frac{DN}{DC}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AN) et (EC) sont parallèles

Problème



2) Le repère est orthonormé donc

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2}$

$AB = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(-4-2)^2 + (0+3)^2}$ $AC = \sqrt{(6+4)^2 + (5-0)^2}$

$BC = \sqrt{(-6)^2 + 3^2}$ $AC = \sqrt{10^2 + 5^2}$

$BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $AC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

Donc $\boxed{AB = 4\sqrt{5} \text{ cm, } BC = 3\sqrt{5} \text{ cm et } AC = 5\sqrt{5} \text{ cm}}$

3)

Si ABC est rectangle l'hypoténuse sera [AC]. Comparons AC^2 et $BC^2 + AB^2$

$AC^2 = 125$ et $BC^2 + AB^2 = 80 + 45 = 125$

donc $BC^2 + AB^2 = AC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle <u>ABC est rectangle en B</u>.

4) Aire (ABC) = $\frac{AB \times BC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{12 \times 5}{2} = 30$

d'où $\boxed{Aire(ABC) = 30 \ cm^2}$

5) $P(ABC) = AB + BC + AC = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ donc $\boxed{P = 12\sqrt{5} \ cm}$ et $\boxed{P \approx 26{,}83 \text{ cm}}$

6)Si un triangle est rectangle alors le cercle circonscrit à ce triangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse
ABC rectangle en B donc le cercle circonscrit à ABC a pour centre E milieu de [AC]

On lit graphiquement les coordonnées de E. $\boxed{E(\ 1\ ;\ \frac{5}{2}\ )}$

[AC] est un diamètre de ce cercle donc $R = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ donc $\boxed{R = \frac{5\sqrt{5}}{2} cm}$ et $\boxed{R \approx 5.6 \text{ cm}}$

7) Le triangle ABC est rectangle en B on peut donc utiliser la trigonométrie

$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{3}$ $\boxed{\tan \widehat{ACB} = \frac{4}{3}}$ en utilisant la calculatrice on obtient $\boxed{\widehat{ACB} \approx 53°}$

9) On lit graphiquement D(0 ; 8)
Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur et de même milieu alors ce quadrilatère est un rectangle.
[AC] et de [BD]sont des diamètres du cercle circonscrit à ABCD donc les diagonales de ABCD ont la même longueur et le même milieu donc <u>**ABCD est un rectangle**</u>