$2^{ème}$ BREVET BLANC – Session 2006 Collège des Ponts Jumeaux		
Epreuve : MATHEMATIQUES		Durée : 2 heures

L'emploi des calculatrices est autorisé

Toutes les étapes des calculs doivent être précisées

QUATRE POINTS SONT ATTRIBUES A L'ORTHOGRAPHE ET A LA PRESENTATION

$1^{ère}$ Partie : Activités numériques — 12 points

Exercice 1

Soit $P = (x - 2)(2x + 1) - (2x + 1)^2$

1) Développer, réduire et ordonner P
2) Factoriser P
3) Résoudre l'équation $(2x + 1)(x + 3) = 0$
4) Pour $x = -\frac{3}{7}$ écrire P sous forme fractionnaire

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant, d'inconnues x et y :
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$$
2. Si x désigne le prix d'un article, exprimer en fonction de x le prix de cet article après une baisse de 20%.
3. Pour l'achat d'un livre et d'un stylo, la dépense est de 35 €. Après une réduction de 20% sur le prix du livre et de 30% sur le prix du stylo, la dépense n'est que de 26 €.
Calculer le prix d'un livre et celui d'un stylo avant la réduction.

Exercice 3

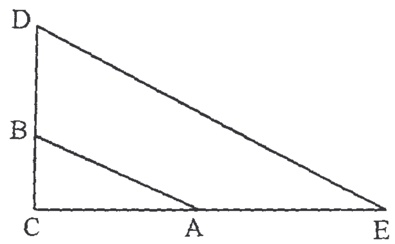
1) On donne $A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} : \frac{5}{24}$
Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible
2) On donne :
$B = \sqrt{300} - 4\sqrt{27} + 6\sqrt{3}$
$C = (5 + \sqrt{3})^2$
$D = (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$
a) Ecrire B sous la forme $b\sqrt{3}$ où b est un nombre entier
b) Ecrire C sous la forme $e + f\sqrt{3}$ avec e et f entiers
c) Montrer que D est un nombre entier.

$2^{ème}$ Partie : Activités géométriques — 12 points

Exercice 1 :

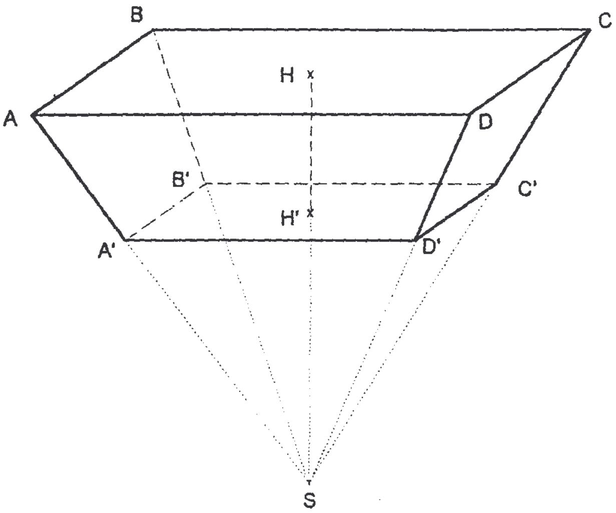
Dans le triangle CDE : A est un point du segment [CE]
B est un point du segment [CD].
Sur le schéma ci-contre, les longueurs représentées ne sont pas exactes.

On donne AC = 8 cm ; CE = 20 cm ;
BC = 6 cm ; CD = 15 cm et DE = 25 cm.



1) Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
2) Le triangle CDE est-il rectangle ? Justifier.
3) Calculer AB.
4) Calculer la valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{CDE}$.

Exercice 2
Une boîte de chocolats a la forme d'une pyramide tronquée (figure ci-dessous).



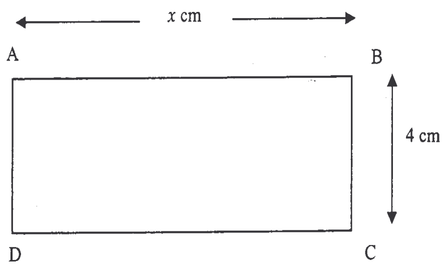
Le rectangle ABCD de centre H et le rectangle A'B'C'D' de centre H' sont dans des plans parallèles.
On donne :
AB =6 cm
BC=18 cm
HH'=8cm
SH=24cm

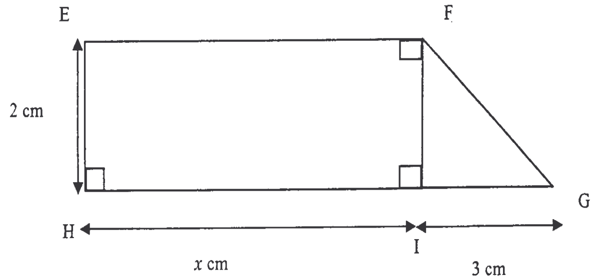
1 - Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD de hauteur SH.
2 - Quel est le coefficient k de la réduction qui permet de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SA'B'C'D' de hauteur SH' ?
3 - En déduire le volume V_2 de la pyramide SA'B'C'D' puis le volume V_3 de la boîte de chocolats.

Exercice 3
Voir annexe 1

3ème Partie : Problème 12 points

On donne les figures suivantes :





1) Exprimer en fonction de x l'aire A_{ABCD} du rectangle ABCD.
2) Exprimer en fonction de x l'aire A_{EFGH} du quadrilatère EFGH.
3) Dans le repère orthonormal de l'annexe 2, tracer en justifiant :
- la représentation graphique (d) de la fonction f définie par : $x \longrightarrow 4x$
- la représentation graphique (d') de la fonction g définie par : $x \longrightarrow 2x + 3$

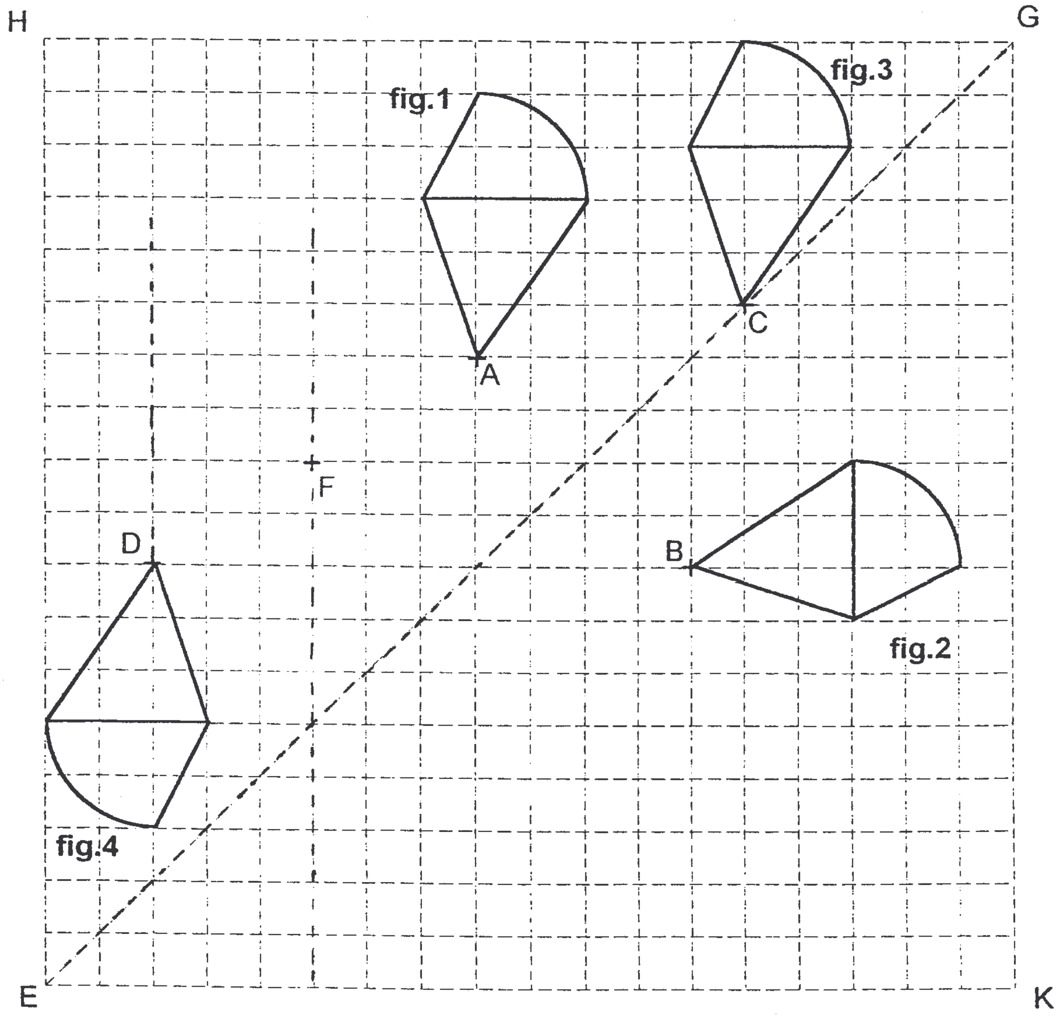
4) a) Calculer l'aire du rectangle ABCD pour $x = 3$.
b) Retrouver ce résultat sur le graphique (on laissera apparents les traits nécessaires).
5) a) Calculer la valeur de x pour que. l'aire du quadrilatère EFGH soit égale à 15 cm².
b) Retrouver ce résultat sur le graphique (on laissera apparents les traits nécessaires).
6) a) Résoudre graphiquement l'équation : $4x = 2x + 3$
b) Retrouver ce résultat en résolvant l'équation : $4x = 2x + 3$
c) Comment interpréter ce résultat pour le rectangle ABCD et le quadrilatère EFGH ?

Annexe 1 : A rendre avec la copie

Exercice 3 Activités Géométriques Nom : Prénom :		n° anonymat :

Activités Géométriques Exercice 3	n° anonymat

On a reproduit plusieurs fois une figure à l'intérieur du carré HGKE dont [EG] est une diagonale.



1) Compléter les phrases suivantes en utilisant les numéros des figures et les points déjà nommés :

La figure ………est l'image de la figure 1 par la symétrie de centre ………

La figure ………est l'image de la figure 1 par la translation de vecteur …….

La figure 2 est l'image de la figure 1 par la ………………….

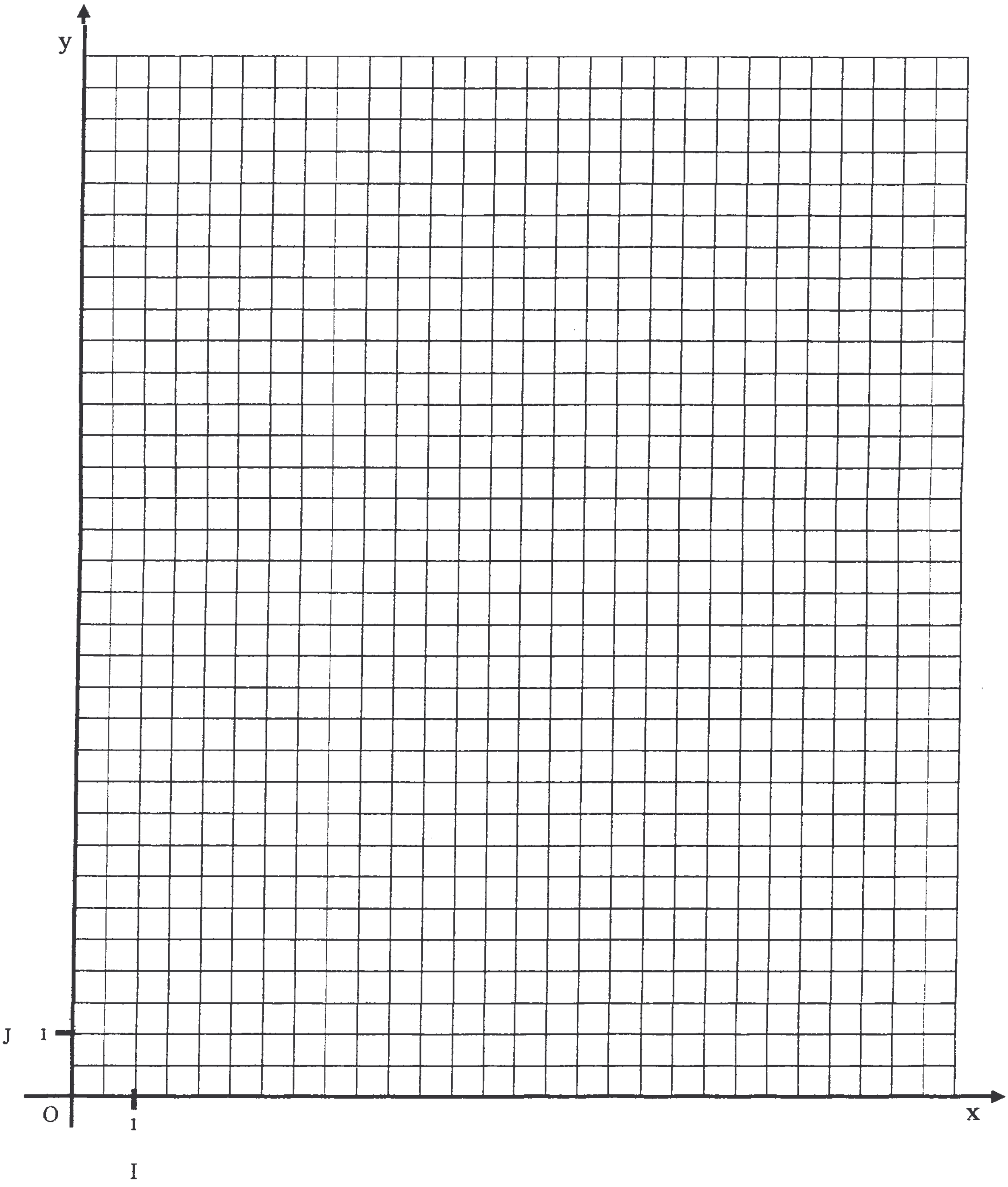
2) a) Tracer l'image de la figure 1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$

b) Tracer l'image de la figure 4 par la symétrie d'axe (EG)

Annexe 2 : A rendre avec la copie

$3^{ème}$ Partie Problème Nom : Prénom :		n° anonymat :

$3^{ème}$ Partie Problème Graphique question 3	n° anonymat



Corrigé Brevet Blanc du 10/05/06

Travaux Numériques

Exercice 1

1) $P = (x-2)(2x+1) - (2x+1)^2$
$P = (2x^2 + x - 4x - 2) - (4x^2 + 4x + 1)$
$P = 2x^2 - 3x - 2 - 4x^2 - 4x - 1$
$P = -2x^2 - 7x - 3$

2) $P = (x-2)(2x+1) - (2x+1)^2$
$P = (2x+1)[(x-2) - (2x+1)]$
$P = (2x+1)[x - 2 - 2x - 1]$
$P = (2x+1)(-x-3)$

3) $(2x+1)(x+3) = 0$
Si un produit est nul alors un des 2 facteurs est nul
donc $2x + 1 = 0$ ou $x + 3 = 0$
donc $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -3$
D'où les solutions $-\frac{1}{2}$ et -3

4) Pour $x = -\frac{3}{7}$, $P = -2\times\frac{(-3)^2}{7^2} - 7\times\frac{-3}{7} - 3$
$P = -2\times\frac{9}{49} + 3 - 3$
$P = -\frac{18}{49}$

Exercice 2

1) $\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$

on exprime x en fonction de y à partir de $\boxed{1}$
$x = 35 - y$
on remplace x par sa valeur dans $\boxed{2}$
$8(35 - y) + 7y = 260$
on réduit et on calcule y
$280 - 8y + 7y = 260$
$-y = 260 - 280$
$y = 20$
on calcule x
$x = 35 - 20$
$x = 15$
Vérification :
$15 + 20 = 35$
$8\times15 + 7\times20 = 120 + 140 = 260$
Conclusion : le couple solution du système est (15 ; 20)

2) Si x désigne le prix d'un article, le prix de cet article après une baisse de 20% est $f(x) = \left(1 - \frac{20}{100}\right)x = 0{,}8x$.

3) Choix des inconnues : soit x le prix d'un livre et y celui d'un stylo avant la réduction.
Après une réduction de 20%, le prix du livre est $0{,}8x$ et après une réduction de 30%, le prix du stylo est $0{,}7y$.
D'où le système d équations : $\begin{cases} x + y = 35 \\ 0{,}8x + 0{,}7y = 26 \end{cases}$
Si on multiplie tous les termes de l'équation $\boxed{2}$ par 10, on retrouve le système de la première question.
Le couple solution est donc (15 ;20)
Conclusion : Avant réduction, le prix d'un livre est de 15 € et celui d'un stylo est de 20 €.

Exercice 3

1) $A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} : \frac{5}{24}$
$A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \times \frac{24}{5}$
$A = \frac{3}{7} - \frac{5 \times 3 \times 24}{7 \times 5}$
$A = \frac{3}{7} - \frac{72}{7}$
$A = -\frac{69}{7}$

2) $B = \sqrt{300} - 4\sqrt{27} + 6\sqrt{3}$
$B = \sqrt{100 \times 3} - 4\sqrt{9 \times 3} + 6\sqrt{3}$
$B = 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$B = 4\sqrt{3}$
$C = (5 + \sqrt{3})^2$
$C = 5^2 + 2 \times 5 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$C = 25 + 10\sqrt{3} + 3$
$C = 28 + 10\sqrt{3}$
donc C est bien de la forme $e + f\sqrt{3}$ avec $e = 28$ et $f = 10$
$D = (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$
$D = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2$
$D = 2 - 5$
$D = -3$ donc D est bien un nombre entier

Travaux Géométriques

Exercice 1 :

1) Comparons les rapports $\frac{CB}{CD}$ et $\frac{CA}{CE}$

$\frac{CB}{CD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{CA}{CE} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Dans le triangle CDE on a donc :

$\begin{cases} \frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} \\ \text{C, B, D alignés} \\ \text{C, A, E alignés} \\ \text{C, B, D dans le même ordre que C, A, E} \end{cases}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (AB)//(DE)

2) Si le triangle CDE est rectangle, alors l'hypoténuse sera [ED]. Comparons ED^2 et $CE^2 + DC^2$

$ED^2 = 25^2 = 625$
$CE^2 + CD^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$
$ED^2 = CE^2 + CD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore CDE est un triangle rectangle en C
3) CDE est un triangle rectangle en C donc CBA est aussi rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = BC^2 + CA^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ donc $AB = \sqrt{100} = 10$ donc $\boxed{AB = 10 \text{ cm}}$
4) CDE est un triangle rectangle en C, on peut donc utiliser la trigonométrie.

$$\sin \widehat{CDE} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{CDE}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CE}{DE} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$\boxed{\widehat{CDE} \approx 53°}$

Exercice 2

1) $V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ avec $\mathscr{B}$ aire la base et h hauteur de la pyramide

Ici la base est le rectangle ABCD donc $\mathscr{B} = AB \times BC = 6 \times 18 = 108$ et $h = SH = 24$

Donc $V_1 = \frac{1}{3} \times 108 \times 24$ donc $\boxed{V_1 = 864 \text{ cm}^3}$

2) On cherche le coefficient k tel que SH' = k SH
On a SH' = SH – HH' = 24 – 8 = 16
donc $16 = k \times 24$ donc $k = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

Le coefficient de réduction cherché est donc $\boxed{k = \frac{2}{3}}$

3) On sait que $V' = k^3 V$ si V est le volume initial et V' le volume réduit

Donc $V_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V_1 = \frac{8}{27} \times 864 = 256$ donc $\boxed{V_2 = 256 \text{ cm}^3}$

Le volume de la boîte de chocolat est différence entre le volume de la grande pyramide et celui de la pyramide réduite

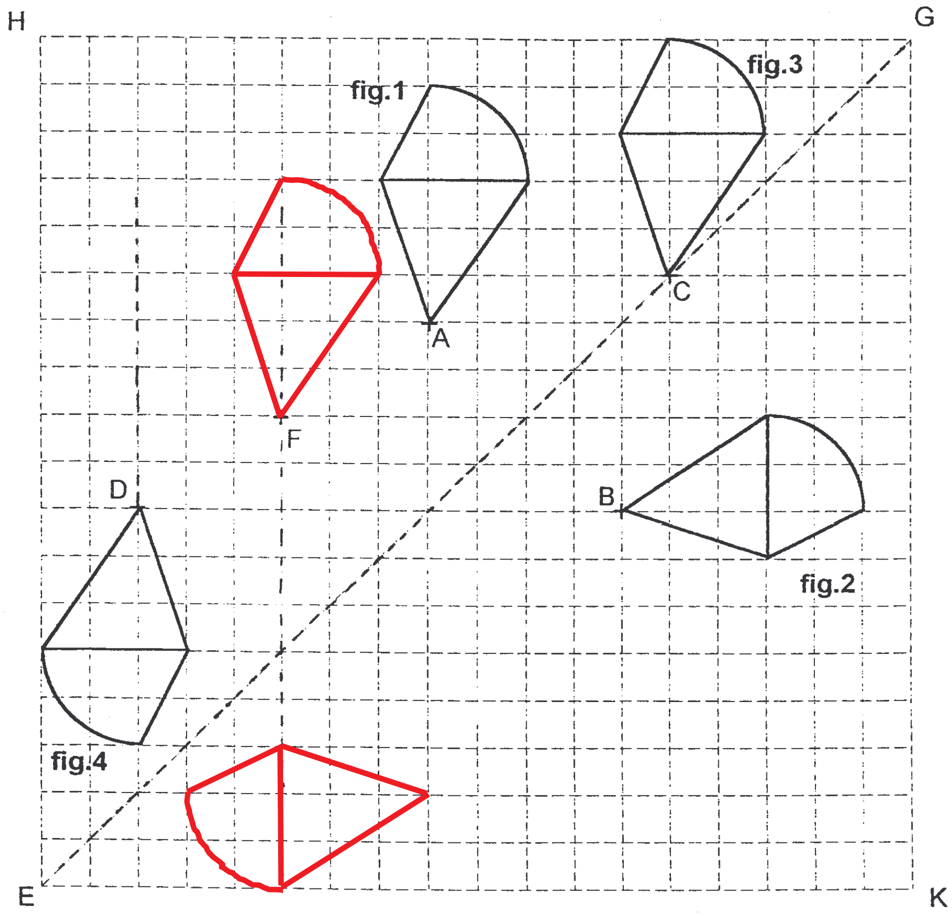
$V_3 = V_1 - V_2 = 864 - 256 = 608$ donc $\boxed{V_3 = 608 \text{ cm}^3}$

Exercice 3

La figure …$\boxed{4}$……est l'image de la figure 1 par la symétrie de centre …$\boxed{F}$……

La figure …$\boxed{3}$……est l'image de la figure 1 par la translation de vecteur …$\boxed{\overrightarrow{AC}}$….

La figure 2 est l'image de la figure 1 $\boxed{\text{par la symétrie orthogonale d'axe (EG)}}$



Problème

1) Aire du rectangle A = L $\times$ l

$A_{ABCD} = AB \times BC = x \times 4 = 4x$

donc $\boxed{A_{ABCD} = 4x}$

2) EFGH est un trapèze Aire d'un trapèze $A = \frac{(B + b) \times h}{2}$ avec B et b bases du trapèze et h hauteur

Ici B = HG = $x + 3$ b = x et h = EH = 2

Donc $A_{EFGH} = \frac{(x + 3 + x) \times 2}{2} = x + 3 + x = 2x + 3$

donc $\boxed{A_{EFGH} = 2x + 3}$

(on peut aussi calculer cette aire comme la somme des aires du rectangle EFIH et du triangle FGI)

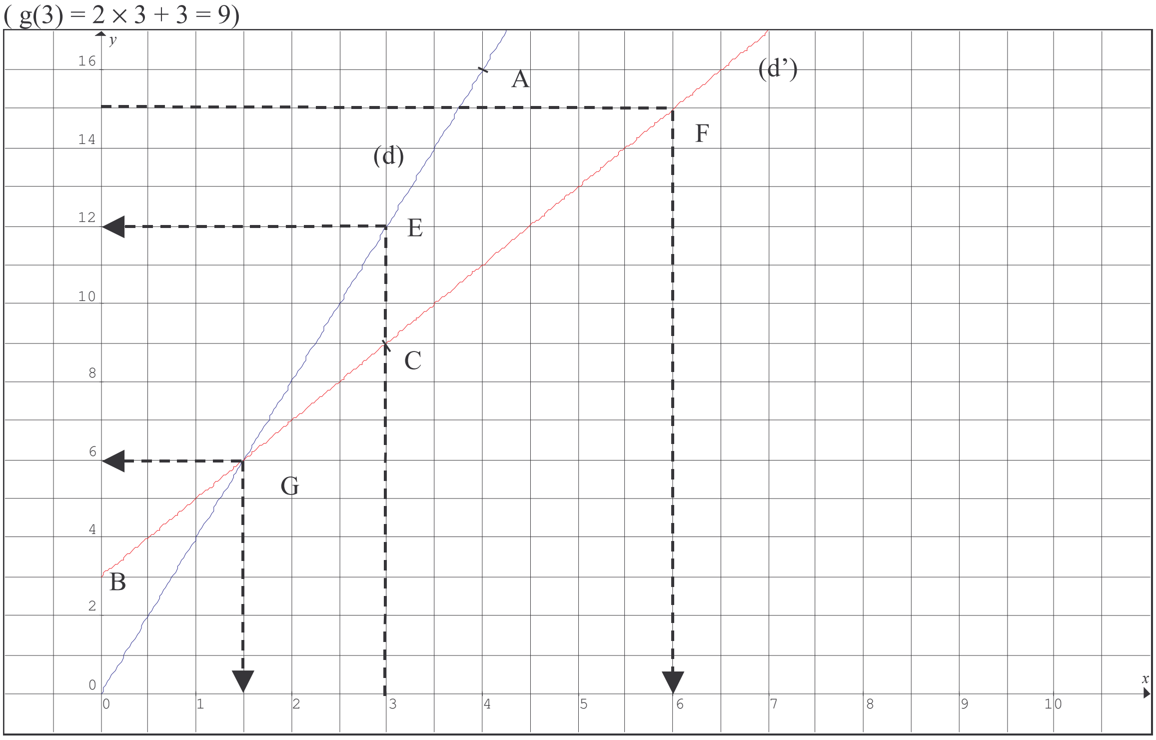
3) $f(x) = 4x$

f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique (d) est la droite passant par l'origine et le point A(4 ; 16)

$g(x) = 2x + 3$

g est une fonction affine donc sa représentation graphique est la droite (d') passant par les points B(0 ; 3) et C(3 ; 9)

($g(3) = 2 \times 3 + 3 = 9$)



4) $x = 3$

$A_{ABCD} = 4 \times 3 = 12$ donc le rectangle ABCD a une aire de 12 cm²

Graphiquement on a E(3 ; 12)

5) $A_{EFGH} = 15$ donc $2x + 3 = 15$

$2x = 15 - 3$

$2x = 12$

$x = 6$

Vérification $2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$

Pour que l'aire de EFGH soit égale à 15 cm² il faut que $x = 6$ cm

Graphiquement le point de (d') d'ordonnée 15 a pour abscisse 6 (point F(6 ; 15))

6) a) Résoudre graphiquement l'équation $4x = 2x + 3$ revient à trouver l'abscisse du point d'intersection des droites (d) et (d')

G point d'intersection de (d) et (d') G (1,5 ; 6)

La solution de cette équation est donc 1,5

b) $4x = 2x + 3$

$4x - 2x = 3$

$2x = 3$

$x = 1{,}5$

Vérification $4 \times 1{,}5 = 6$ et $2 \times 1{,}5 + 3 = 3 + 3 = 6$

donc la solution de l'équation est bien 1,5

c) $4x$ et $2x + 3$ représentant les aires du rectangle et du trapèze, résoudre l'équation revient à chercher la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle et l'aire du trapèze sont égales

Pour $x = 1{,}5$ cm le rectangle ABCD et le trapèze EFGH ont tous deux une aire de 6 cm².