BREVET BLANC – 24 Janvier2007 **Collège des Ponts Jumeaux**		
Epreuve : MATHEMATIQUES		**Durée : 2 heures**

L'emploi des calculatrices est autorisé

Toutes les étapes des calculs doivent être précisées

QUATRE POINTS SONT ATTRIBUES A L'ORTHOGRAPHE ET A LA PRESENTATION

$1^{\text{ère}}$ Partie : Activités numériques — 12 points

Exercice 1

1. Effectuer les calculs suivants, en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible :

$$A = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right) \qquad B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21} \qquad C = \frac{3 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{5}}$$

2. Calculer l'expression suivante et donner son écriture scientifique : $D = \frac{150\times10^{-7}\times8\times10^{3}}{6\times10^{-5}}$

Exercice 2

On donne l'expression : $A = (3x - 5)(5 - 2x) - (3x - 5)^2$.

1) Développer puis réduire A.
2) Factoriser A.
3) Calculer A pour $x = \sqrt{3}$.
4) Résoudre l'équation $(3x - 5)(-5x + 10) = 0$.

Exercice 3

On considère les nombres : $A = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$ et $B = \sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}$

a) Ecrire A et B sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier et b entier le plus petit possible
b) Montrer que $\frac{A}{B}$ est un nombre entier.

Exercice 4

Dans un collège, les $\frac{13}{20}$ des élèves sont des demi-pensionnaires, 15% des élèves sont des internes et les 172 élèves restants sont externes.

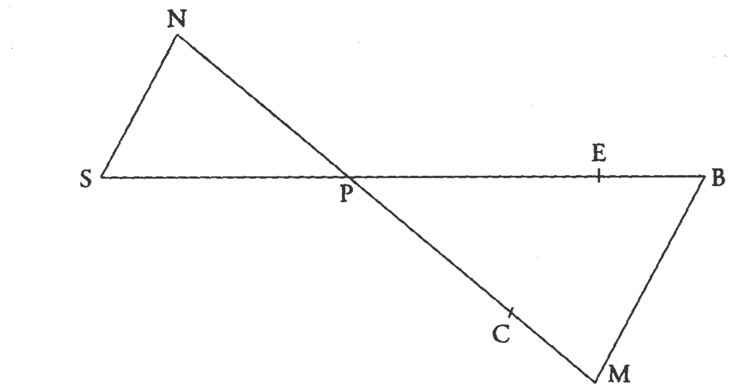
Quel est le nombre d'élèves inscrits dans cet établissement ?

$2^{\text{ème}}$ Partie : Activités géométriques — 12 points

Exercice 1

1. Dans un repère orthonormal (O ; I, J), placer les points : A(5; 1) ; B(–2; 2) ; C(2; 5).
2. a. Calculer AB et BC.
b. On donne AC = 5.
Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
3. Soit le point E symétrique du point A par rapport au point C et soit le point F symétrique du point B par rapport au point C.
a. Construire les points E et F
b. Quelle est la nature du quadrilatère ABEF ? Justifier la réponse.

Exercice 2



On considère la figure ci-dessous qui n'est pas réalisée en vraie grandeur
Les points S, P, E et B sont alignés ainsi que les points N, P, Cet M. Les droites (MB) et (NS) sont parallèles.
On donne : PM = 12 cm, MB = 6,4 cm ;
PB = 13,6 cm et PN = 9 cm.
1. Démontrer que le triangle PBM est rectangle.
2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{PBM}$ arrondie au degré près.
3. Calculer la longueur NS.
4. On considère le point E du segment [PB] tel que PE = 3,4 cm et le point C du segment [PM] tel que PC = 3 cm.
Les droites (CE) et (MB) sont-elles parallèles ?

Exercice 3

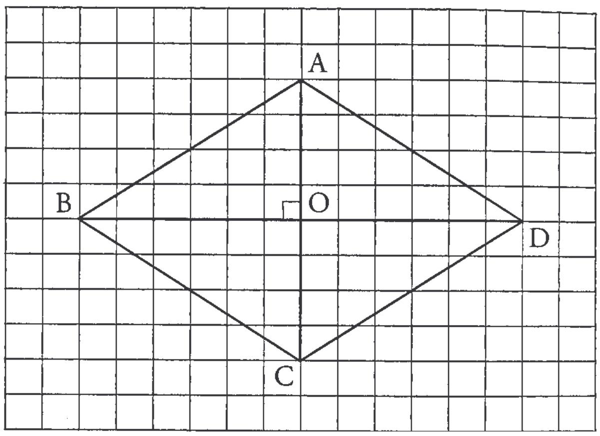
Une sphère a pour centre O et pour rayon 7 cm
Un plan P situé à 3 cm de O coupe cette sphère selon un cercle C de centre H

a) Représenter en perspective cette situation et marquer un point M du cercle C
b) Calculer le rayon de ce cercle (valeur exacte puis arrondi au millimètre)
c) Calculer le volume de la boule de centre O et de rayon 7 cm (valeur exacte puis arrondi au dixième)

3ème Partie : Problème — 12 points

ABCD est un losange dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
On donne : AB = 5 cm et AC = 6 cm.

Sur cette figure, les dimensions ne sont pas respectées.



PREMIÈRE PARTIE

- 1. Calculer BO, justifier.
  En déduire que BD = 8 cm.
- 2. Calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{ABO}$.
- 3. Calculer l'aire du losange ABCD.

DEUXIÈME PARTIE

On place un point M sur le segment [AB].
La droite passant par M et parallèle à la droite (BD) coupe le côté [AD] en N.

- 1.On suppose que AM = 3. Calculer AN et MN.
  Justifier.
- 2. On pose AM = x. Montrer que MN = $1{,}6x$.

TROISIÈME PARTIE

Pour cette partie, on a encore AM = x.
La droite passant par M et parallèle à la droite (AC) coupe le côté [BC] en P.

- 1. Exprimer BM en fonction de x, puis montrer que MP = $6 - 1{,}2\,x$.
- 2. Calculer la valeur de x pour laquelle le triangle MNP est isocèle en M.

QUATRIÈME PARTIE

- 1. Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (MN), puis que AM = AN.
  En déduire que la droite (AC) est la médiatrice du segment [MN].
  De la même façon, on démontrerait que la droite (BD) est la médiatrice du segment [MP].
- 2. En déduire le rôle du point 0 pour le triangle MNP.

Corrigé Brevet Blanc 24/01/07

Partie numérique

Exercice 1

$\mathbf{A = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)}$

$A = 1 - (\frac{1}{4} + \frac{3}{5})$

$A = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} - \frac{12}{20}$

$A = \frac{3}{20}$

$\mathbf{B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}}$

$B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{20}$

$B = \frac{8}{3} - \frac{21}{12}$

$B = \frac{32}{12} - \frac{21}{12}$

$B = \frac{11}{12}$

$\mathbf{C = \dfrac{3 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{5}}}$

$C = \dfrac{\frac{6}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}$

$C = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$

$C = \frac{5}{12}$

$D = \dfrac{150 \times 10^{-7} \times 8 \times 10^{3}}{6 \times 10^{-5}}$

$D = \frac{1200}{6} \times \frac{10^{-4}}{10^{-5}}$

$D = 200 \times 10^{-4+5}$

$D = 2 \times 10^{2} \times 10$

$D = 2 \times 10^{3}$

Exercice 2

1) $A = (3x - 5)(5 - 2x) - (3x - 5)^2$.
   $A = 15x - 6x^2 - 25 + 10x - (9x^2 - 30x + 25)$
   $A = 15x - 6x^2 - 25 + 10x - 9x^2 + 30x - 25)$
   $A = -15x^2 + 55x - 50$
2) $A = (3x - 5)(5 - 2x) - (3x - 5)^2$
   $A = (3x - 5)[(5 - 2x) - (3x - 5)]$
   $A = (3x - 5)(5 - 2x - 3x + 5)$
   $A = (3x - 5)(10 - 5x)$
   $A = 5(3x - 5)(2 - x)$
3) $x = \sqrt{3}$
   $A = -15(\sqrt{3})^2 + 55\sqrt{3} - 50$
   $A = -15 \times 3 + 55\sqrt{3} - 50$
   $A = -95 + 55\sqrt{3}$
4) $(3x - 5)(-5x + 10) = 0$
   Si un produit est nul alors un des 2 facteurs est nul
   donc $3x - 5 = 0$ ou $-5x + 10 = 0$
   donc $x = \frac{5}{3}$ ou $x = 2$
   Vérification : $(3 \times \frac{5}{3} - 5)(-5 \times \frac{5}{3} + 10) = 0 \times (-5 \times \frac{5}{3} + 10) = 0$
   $(3 \times 2 - 5)(-5 \times 2 + 10) = (3 \times 2 - 5) \times 0 = 0$
   D'où les solutions $\frac{5}{3}$ et 2

Exercice 4

Soit x le nombre d'élèves inscrits

$\frac{13}{20}x + \frac{15}{100}x + 172 = x$

$\frac{65}{100}x + \frac{15}{100}x + \frac{17200}{100} = \frac{100}{100}x$

$65x + 15x + 17200 = 100x$

$17200 = 100x - 65x - 15x$

$17200 = 20x$

$860 = x$

Vérification :

$\frac{13}{20} \times 860 + \frac{15}{100} \times 860 + 172 = 559 + 129 + 172 = 860$

La solution de l'équation est donc 860

Il y a donc 860 élèves inscrits dans cet établissement

Exercice 3

$A = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$

$A = 2\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4 \times 3}$

$A = 2\sqrt{9} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4} \times \sqrt{3}$

$A = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$A = 6\sqrt{3}$

$B = \sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}$

$B = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} - 7\sqrt{3}$

$B = \sqrt{25} \times \sqrt{3} + \sqrt{16} \times \sqrt{3} - 7\sqrt{3}$

$B = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$

$B = 2\sqrt{3}$

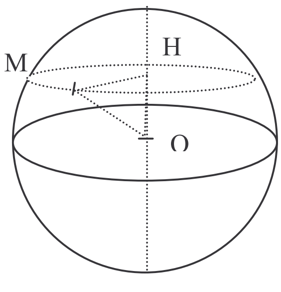
$\frac{A}{B} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$\frac{A}{B} = 3$

donc $\frac{A}{B}$ est bien un nombre entier

Partie géométrique

Exercice 3



Le plan P est situé à 3 cm de O donc (OH) ⊥ P

M point de P donc MHO triangle rectangle en H

D'après le théorème de Pythagore

$OM^2 = MH^2 + HO^2$ avec OM = 7 et OH = 3

$7^2 = MH^2 + 3^2$

$MH^2 = 40$

$MH = \sqrt{40}$ cm

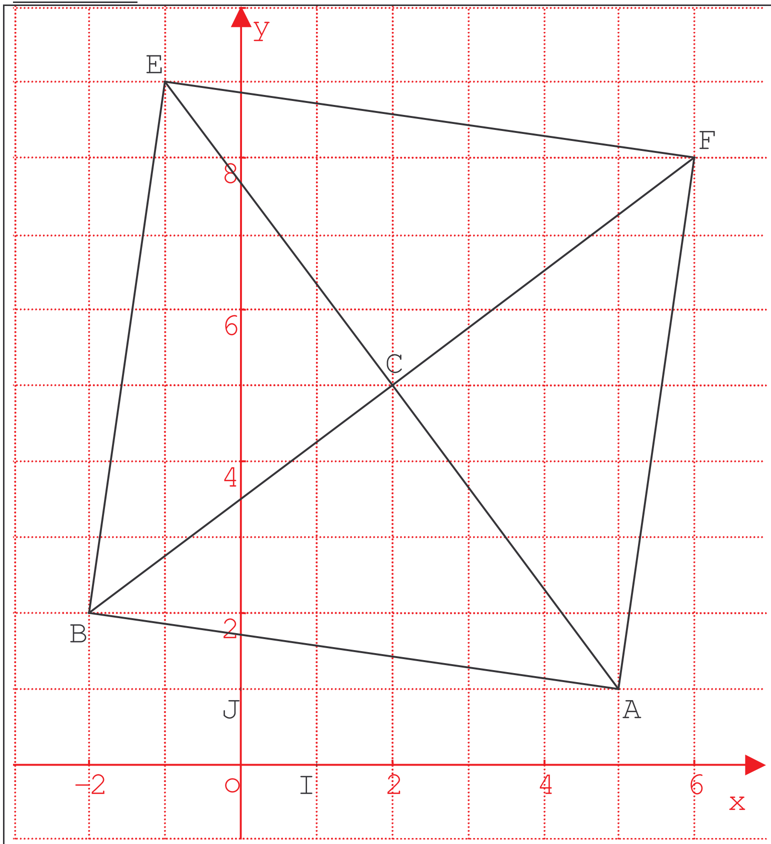
$MH \approx 6{,}3$ cm

Volume de la boule : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V = \frac{4}{3}\pi \times 7^3$ donc $V = \frac{1372}{3}\pi$ cm^3

donc $V \approx 1436{,}8$ cm^3

Exercice 1



2.a) $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$AB^2 = (-2-5)^2 + (2-1)^2$

$AB^2 = 49 + 1$

$AB^2 = 50$

$AB = \sqrt{50}$ (une distance est un nombre positif)

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$

$BC^2 = (2-(-2))^2 + (5-2)^2$

$BC^2 = 16 + 9$

$BC^2 = 25$

$BC = \sqrt{25}$

$BC = 5$

b) $AB = \sqrt{50}$, $BC = 5$ et $AC = 5$

ABC est donc un triangle isocèle en C

Si ABC est un triangle rectangle l'hypoténuse sera [AB]

Comparons AB^2 et $BC^2 + AC^2$

$AB^2 = 50$

$BC^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en C

Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en C

3.a)E symétrique de A par rapport à C donc C milieu de [AE]

F symétrique de B par rapport à C donc C milieu de [BF]

b) ABC isocèle en C donc CB = CA

$\begin{cases} \text{C milieu de [AE]} \\ \text{C milieu de [BF]} \\ CB = CA \end{cases}$ donc BF = AE

Les diagonales de ABEF ont la même longueur et se coupent en leur milieu donc ABEF est une rectangle

De plus ABC rectangle en C donc les diagonales sont perpendiculaires

ABEF rectangle avec des diagonales perpendiculaires est donc un carré.

Exercice 2

1. Si le triangle PBM est rectangle l'hypoténuse sera [PB]. Comparons PB^2 et $PM^2 + MB^2$

$\begin{cases} PB^2 = 13{,}6^2 = 184{,}96 \\ PM^2 + MB^2 = 12^2 + 6{,}4^2 = 144 + 40{,}96 = 184{,}96 \end{cases}$ donc $PB^2 = PM^2 + MB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle PBM est rectangle en M

2. Le triangle PBM étant rectangle on peut utiliser la trigonométrie.

$$\tan \widehat{PBM} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{PBM}}{\text{côté adjacent à } \widehat{PBM}} = \frac{12}{6{,}4} = 1{,}875 \text{ d'où } \widehat{PBM} \approx 62°$$

3. $\begin{cases} \text{M, P et N alignés} \\ \text{B,P et S alignés} \\ \text{(MB)//(NS)} \end{cases}$ donc d'après la propriété de Thalès $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{PS}{PB} = \dfrac{NS}{MB}$

On a PM = 12, PN = 9 et MB = 6,4 donc $\dfrac{9}{12} = \dfrac{NS}{6{,}4}$ donc $NS = \dfrac{9 \times 6{,}4}{12}$ donc NS = 4,8 cm

4. Comparons les rapports $\dfrac{PE}{PB}$ et $\dfrac{PC}{PM}$

$\begin{cases} \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{3{,}4}{13{,}6} = 0{,}25 \\ \dfrac{PC}{PM} = \dfrac{3}{12} = 0{,}25 \end{cases}$ donc $\dfrac{PE}{PB} = \dfrac{PC}{PM}$

$\begin{cases} \text{P, E et B alignés} \\ \text{P, C et M alignés} \\ \text{P, E, B dans le même ordre que P, C, M} \\ \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{PC}{PM} \end{cases}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (CE)//(MB)

Problème

1ère Partie

1) Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

Le triangle AOB est donc rectangle en O et $AO = \frac{1}{2}AC = 3$ cm.

D'après le théorème de Pythagore

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$5^2 = 3^2 + BO^2$

$25 = 9 + BO^2$

$16 = BO^2$ donc $BO = \sqrt{16}$ donc BO = 4 cm

BD = 2 BO = 8 donc BD = 8 cm

2) ABO triangle rectangle donc on peut utiliser la trigonométrie.

$\sin \widehat{ABO} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABO}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin \widehat{ABO} = \frac{AO}{AB} = \frac{3}{5}$

donc $\widehat{ABO} \approx 37°$

3) $\text{Aire(ABCD)} = \frac{AC \times BD}{2}$

$\text{Aire(ABCD)} = \frac{6 \times 8}{2}$

Aire(ABCD = 24 cm²

2ème Partie

A, M, B alignés, A, N, D alignés et (MN)//(BD) donc d'après le théorème de Thalès $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{MN}{BD}$

1) AM = 3

$\frac{3}{5} = \frac{AN}{5}$ donc AN = 3 cm

$\frac{3}{5} = \frac{MN}{8}$ donc $MN = \frac{3 \times 8}{5}$ donc MN = 4,8 cm

2) $AM = x$

$\frac{x}{5} = \frac{MN}{8}$ donc $MN = \frac{8 \times x}{5} = \frac{8}{5}x = 1{,}6\,x$

3ème Partie

1) B, M, A alignés, B, P, C alignés et (MP)//(AC) donc d'après le théorème de Thalès $\frac{BM}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{MP}{AC}$

$BM = BA - AM = 5 - x$

donc $\frac{5 - x}{5} = \frac{MP}{6}$ donc $MP = \frac{6 \times (5 - x)}{5} = \frac{30 - 6x}{5} = \frac{30}{5} - \frac{6}{5}x = 6 - 1{,}2\,x$ donc $MP = 6 - 1{,}2\,x$

2) Pour que MNP soit isocèle en M il faut que MP = MN

Or $MN = 1{,}6\,x$ et $MP = 6 - 1{,}2\,x$

donc $1{,}6\,x = 6 - 1{,}2\,x$

donc $1{,}6\,x + 1{,}2\,x = 6$

donc $2{,}8\,x = 6$

donc $x = \frac{6}{2{,}8}$

donc $x = \frac{60}{28}$

donc $x = \frac{15}{7}$

Vérification :

$6 - 1{,}2 \times \frac{15}{7} = 6 - \frac{18}{7} = \frac{42}{7} - \frac{18}{7} = \frac{24}{7}$

$1{,}6 \times \frac{15}{7} = \frac{24}{7}$

Pour que le triangle MNP soit isocèle en M il faut donc que $x = \frac{15}{7}$ cm

4ème Partie

1) Si 2 droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires donc $(AC)\perp(BD)$

$(AC)\perp(BD)$ et (MN)//(BD) donc $(MN)\perp(AC)$

D'après la 2ème partie on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ or ABCD étant un losange AB = AD donc AM = AN

AM = AN donc A appartient à la médiatrice de [MN]

Passant par un point il n'existe qu'une seule perpendiculaire à une droite donnée

(AC) passe par A et est perpendiculaire à (MN) donc (AC) médiatrice de [MN]

2) (AC) médiatrice de [MN] et (BD) médiatrice de [MP]

Le point d'intersection des médiatrices des côtés d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle

O point d'intersection de (AC) et de (BD) est donc le centre du cercle circonscrit à MNP.