Mathématiques 3^e épreuve commune 6/03/07

1 Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes et représenter dans chaque cas les solutions sur une droite graduée :

$x + 2 < 3x - 4$ | $(x - 2)^2 \leq (x - 3)(x - 2)$

2 *Des transports scolaires*

Un collège décide de louer un bus pour les transports scolaires. Deux sociétés sont contactées qui proposent les tarifs suivants :

Société Machin : forfait de 100 € plus 1€ par km parcouru par sortie

Société Chose : forfait de 50 € plus 3 € par km parcouru par sortie

On appelle x le nombre de kilomètres à parcourir par sortie

On appelle M la dépense avec la société Machin et C la dépense avec la société Chose.

a) Calculer M et C pour une sortie de 15 km puis pour une sortie de 150 km
b) Exprimer M et C en fonction de x
c) Pour quelles valeurs de x la société Machin est–elle plus intéressante que la société Chose ?

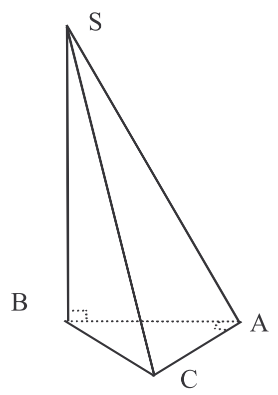
3 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ 5x - 4y = 25 \end{cases}$$

4 On considère une pyramide de hauteur SB = 7 cm et dont la base est un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3cm, AC = 4cm.

On coupe la pyramide SABC par un plan parallèle à la base ; on obtient les points B' sur [SB] ; A' sur [SA] et C' sur [SC] tels que $\frac{SB'}{SB} = \frac{3}{7}$.

a. Calculer le volume de la pyramide SABC
b. Montrer que $A'B' = \frac{9}{7}$ cm, $A'C' = \frac{12}{7}$ cm et $B'C' = \frac{15}{7}$ cm
c. Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?
d. Calculer le volume de la pyramide SA'B'C'.
(On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au mm^3.)

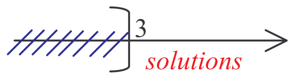


Correction du devoir de mathématiques du 06/03/2007

$\boxed{1}$

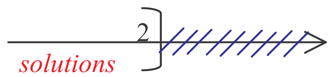
$$x + 2 < 3x - 4$$
$$4 + 2 < 3x - x$$
$$6 < 2x$$
$3 < x$ (on divise par 2, nombre positif)

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 3



$$(x-2)^2 \leq (x-3)(x-2)$$
$$x^2 - 4x + 4 \leq x^2 - 2x - 3x + 6$$
$$x^2 - 4x - x^2 + 2x + 3x \leq 6 - 4$$
$$x \leq 2$$

Les solutions sont le nombre 2 **et** les nombres inférieurs strictement à 2



$\boxed{2}$ a) Soit M(x) la dépense pour la société Machin pour x km et C(x) la dépense pour la société Chose.

$x = 15$ donc $M(15) = 100 + 1 \times 15 = 115$ $\quad C(15) = 50 + 3 \times 15 = 50 + 45 = 95$

$x = 150$ donc $M(150) = 100 + 1 \times 150 = 250$ $\quad C(150) = 50 + 3 \times 150 = 50 + 450 = 500$

115 € avec Machin et 95 € avec Chose pour une sortie de 15 km
250 € avec Machin et 500 € avec Chose pour une sortie de 150 km

b) $M(x) = 100 + 1 \times x = 100 + x$ $\quad C(x) = 50 + 3 \times x = 50 + 3x$

c) $M(x) < C(x)$ donc : $100 + x < 50 + 3x$

$$100 < 50 + 3x - x$$
$$100 < 50 + 2x$$
$$100 - 50 < 2x$$
$50 < 2x$ (on divise par 2 nombre positif)
$$25 < x$$

Conclusion : Si la distance à parcourir est supérieure à 25 km la société Machin est plus intéressante
Pour 25 km même dépense pour les 2 sociétés et pour moins de 25 km la société Chose est plus intéressante.

$\boxed{3}$

$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$$

- on exprime y en fonction de x à partir de $\boxed{1}$
  $y = -3 - 3x$
- on remplace y par sa valeur dans $\boxed{2}$
  $2x + 5(-3 - 3x) = 11$
- on réduit et on calcule x
  $2x - 15 - 15x = 11$
  $-15 - 13x = 11$
  $-15 - 11 = 13x$
  $-26 = 13x$
  $-2 = x$
- on calcule y
  $y = -3 - 3\times(-2)$
  $y = 3$
- Vérification :
  $3 \times (-2) + 3 = -6 + 3 = -3$
  $2 \times (-2) + 5 \times 3 = -4 + 15 = 11$
- **D'où la solution (– 2 ; 3)**

$$\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ 5x - 4y = 25 \end{cases}$$

- on exprime y en fonction de x à partir de $\boxed{1}$
  $2y = -7 - 3x$
  $y = -3{,}5 - 1{,}5x$
- on remplace y par sa valeur dans $\boxed{2}$
  $5x - 4(-3{,}5 - 1{,}5x) = 25$
- on réduit et on calcule x
  $5x + 6x + 14 = 25$
  $11x = 25 - 14$
  $11x = 11$
  $x = 1$
- on calcule y
  $y = -3{,}5 - 1{,}5$
  $y = -5$
- Vérification :
  $3 \times 1 + 2 \times (-5) = 3 - 10 = -7$
  $5 \times 1 - 4 \times (-5) = 5 + 20 = 25$
- **D'où la solution (1 ; – 5)**

$\boxed{4}$

a) $V = \frac{1}{3}\,\mathbf{B} \times h$ avec $\mathbf{B}$ = aire(ABC) $= \frac{AB \times AC}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ cm² et h = SB = 7 cm donc $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 7 = 14$.

Donc $\boxed{V = 14 \text{ cm}^3}$

b) ABC triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore,
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$ donc BC = 5 cm.

1ère méthode : Le plan qui coupe la pyramide est parallèle à la base donc les droites d'intersection sont parallèles.

Donc (A'B')//(AB), (A'C')//(AC) et (B'C')//(BC).

De plus les points S, A', A sont alignés ainsi que S, B', B et S, C', C
On peut donc utiliser le théorème de Thalès dans les triangles SAB, SAC et SBC
On a $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB}$ et $\frac{SA'}{SA} = \frac{SC'}{SC} = \frac{A'C'}{AC}$ et $\frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{B'C'}{BC}$.
Or $\frac{SB'}{SB} = \frac{3}{7}$ donc tous ces rapports sont égaux à $\frac{3}{7}$.
Donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{7}$. D'où $A'B' = \frac{3}{7} \times AB = \frac{9}{7}$ $A'C' = \frac{3}{7} \times AC = \frac{12}{7}$ $B'C' = \frac{3}{7} \times BC = \frac{15}{7}$

2ème méthode : On coupe la pyramide SABC par un plan parallèle à la base, la section A'B'C' ainsi obtenue est donc une réduction de la base ABC de coefficient $\frac{SB'}{SB} = \frac{3}{7}$.

D'où $A'B' = \frac{3}{7} \times AB = \frac{9}{7}$ $A'C' = \frac{3}{7} \times AC = \frac{12}{7}$ $B'C' = \frac{3}{7} \times BC = \frac{15}{7}$

Conclusion : $\boxed{A'B' = \frac{9}{7} \text{ cm} \quad A'C' = \frac{12}{7} \text{ cm et } B'C' = \frac{15}{7} \text{ cm}}$

c) *1ère méthode* : Comparons $B'C'^2$ et $A'C'^2 + A'B'^2$

$B'C'^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49}$ $A'C'^2 + A'B'^2 = \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{81}{49} + \frac{144}{49} = \frac{225}{49}$

$B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore **A'B'C' rectangle en A'**

2ème méthode :

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que la base.

ABC triangle rectangle en A donc **A'B'C' rectangle en A'.**

d) *1ère méthode* : $V' = \frac{1}{3}\,\mathbf{B'} \times h'$ $h' = SB' = \frac{3}{7} \times 7 = 3$ et $\mathbf{B'} = \frac{A'B' \times A'C'}{2} = \frac{12}{7} \times \frac{9}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{54}{49}$

$V' = \frac{1}{3} \times \frac{54}{49} \times 3 = \frac{54}{49}$

2ème méthode : la pyramide SABC étant coupée par un plan parallèle à la base, la pyramide SA'B'C' ainsi obtenue est donc une réduction de la pyramide SABC de coefficient $\frac{SB'}{SB} = \frac{3}{7}$.

Alors $V' = k^3 V$, c'est–à–dire $V' = \frac{3^3}{7^3} \times 14 = \frac{27 \times 7 \times 2}{49 \times 7} = \frac{54}{49}$

Conclusion : $\boxed{V' = \frac{54}{49} \text{ cm}^3 \qquad V' \approx 1{,}102 \text{ cm}^3}$