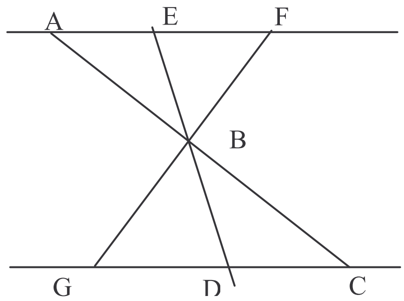
Exercices théorème de Thalès et sa réciproque

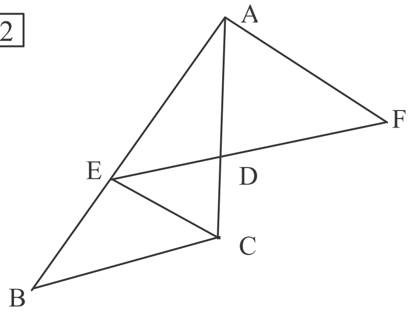
1



La figure ci–contre a été faite à main levée.
On sait que : (AF)//(GC)
AB = 5   BC = 6   AE = 4   BE = 3 et GF = 9

a) Calculer DC
b) Calculer ED
c) Calculer BG

2



Soit ABC un triangle dans lequel on a tracé une droite (ED) parallèle à la droite (BC)
On donne AE = BC = 3 et EB = AD = 2

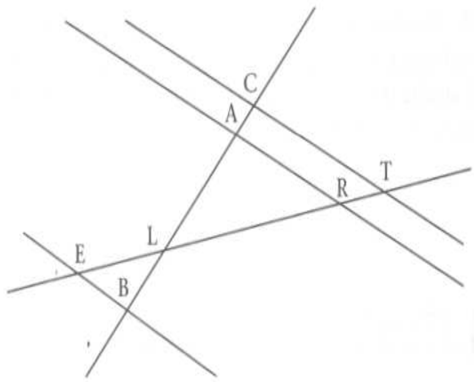
a) Calculer AC, puis DC
   Calculer ED
b) F est un point de (DE) tel que DF = 2,7
   Les droites (EC) et AF) sont-elles parallèles ?

3

Sur la figure ci-contre
- les droites (AR) et (CT) sont parallèles;
- les points E, L, R, T sont alignés;
- les points C, A, L, B sont alignés;
- on donne: LC = 6 cm   LT = 9 cm
  LA = 4,8 cm   LB = 1,5 cm LE = 3 cm.

1. Calculer LR.
2. Les droites (EB) et (CT) sont-elles parallèles?

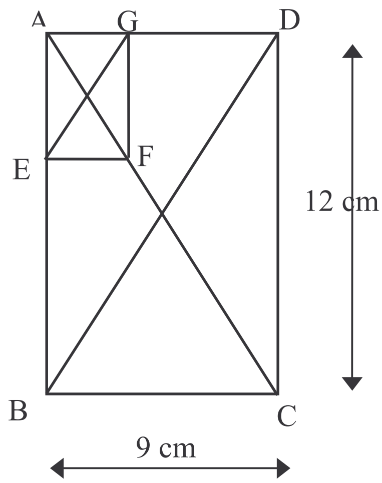
(La figure ci-contre n'est pas conforme aux dimensions données.)



4

ABCD est un rectangle de 12 cm de longueur et de 9 cm de largeur.
E est un point de [AB]. La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F et la parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.

1)On suppose dans cette question que AE = 3 cm
a) Montrer que AC = 15 cm
b) Calculer AF
2) Montrer que (EG)//(BD)
3)On suppose dans cette question que AE = x
a) Quelles sont les valeurs minimale et maximale de x ?
b) Montrer que AG = $\frac{3}{4}x$
c) Exprimer le périmètre du rectangle AEFG en fonction de x



Correction des exercices théorème de Thalès et réciproque :

1 a) b) A point de (BC), E point de (BD), (AF)//(GC) donc (AE)//(GD)

On peut donc appliquer le théorème de Thalès et on obtient : $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{AE}{DC}$

$\frac{BA}{BC} = \frac{AE}{DC}$ donc $\frac{5}{6} = \frac{4}{DC}$ donc $DC = \frac{6\times4}{5}$ donc $\boxed{DC = \frac{24}{5}}$

$\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD}$ donc $\frac{5}{6} = \frac{3}{BD}$ donc $BD = \frac{3\times6}{5}$ donc $BD = \frac{18}{5}$

$B \in [ED]$ donc $ED = EB + BD$ donc $ED = 3 + \frac{18}{5} = \frac{15}{5} + \frac{18}{5} = \frac{33}{5}$ donc $\boxed{ED = \frac{33}{5}}$

c) F point de (GB), A point de (BC), (AF)//(GC)

On peut donc appliquer le théorème de Thalès et on obtient : $\frac{BC}{BA} = \frac{BG}{BF} = \frac{CG}{AF}$

Posons $BG = x$ on a $BF = 9 - x$; on obtient en remplaçant $\frac{6}{5} = \frac{x}{9-x}$ d'où $5x = 6(9 - x)$

donc $5x = 54 - 6x$
donc $5x + 6x = 54$
donc $11x = 54$

donc $x = \frac{54}{11}$ on a $BG = x$ donc $\boxed{BG = \frac{54}{11}}$

2 a) $\begin{cases} \text{A, E, B alignés} \\ \text{A, D, C alignés} \\ (DE)//(BC) \end{cases}$ donc d'après la propriété de Thalès $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$

donc $\frac{3}{5} = \frac{2}{AC}$ d'où $\boxed{AC = \frac{10}{3}}$

$D \in [AC]$ donc $DC = \frac{10}{3} - 2$ donc $\boxed{DC = \frac{4}{3}}$

$\frac{3}{5} = \frac{DE}{3}$ donc $\boxed{DE = \frac{9}{5}}$

b) Comparons les rapports $\frac{DF}{DE}$ et $\frac{DA}{DC}$

$\frac{DF}{DE} = 2{,}7 \times \frac{5}{9} = 1{,}5$ $\frac{DA}{DC} = 2 \times \frac{3}{4} = 1{,}5$ donc $\frac{DA}{DC} = \frac{DF}{DE}$

$\begin{cases} C \in (AD) \\ E \in (DF) \\ \text{A, D, C dans le même ordre que F, D, E} \\ \frac{DA}{DC} = \frac{DF}{DE} \end{cases}$ d'après la réciproque du théorème de Thalès (EC)//(AF)

3 1) $\begin{cases} \text{L, A, C alignés} \\ \text{L, R, T alignés} \\ (AR)//(CT) \end{cases}$ donc d'après le théorème de Thalès $\frac{LA}{LC} = \frac{LR}{LT} = \frac{AR}{CT}$

donc $\frac{4{,}8}{6} = \frac{LR}{9}$ donc $LR = \frac{9\times4{,}8}{6} = 7{,}2$ d'où $\boxed{LR = 7{,}2 \text{ cm}}$

2) Comparons les rapports $\frac{LE}{LT}$ et $\frac{LB}{LC}$

$\frac{LE}{LT} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\frac{LB}{LC} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{LE}{LT} \neq \frac{LB}{LC}$

$\begin{cases} \text{B, L, C alignés} \\ \text{E, L, T alignés} \\ \frac{LE}{LT} \neq \frac{LB}{LC} \end{cases}$ donc d'après le théorème de Thalès (contraposée) (EB) n'est pas parallèle à (CT).

$\boxed{4}$

1) a) ABCD rectangle donc le triangle ABC est rectangle en A
D'après le théorème de Pythagore on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$
donc $AC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$ donc $AC = \sqrt{225} = 15$ donc $\boxed{AC = 15 \text{ cm}}$

b) $\begin{cases} E \in (AB) \\ F \in (AC) \\ (EF)//(BC) \end{cases}$ on peut donc appliquer le théorème de Thalès d'où $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$

donc $\dfrac{3}{12} = \dfrac{AF}{15}$ donc $AF = \dfrac{3\times 15}{12}$ donc $\boxed{AF = \dfrac{15}{4} \text{ cm}}$

2)
$\begin{cases} G \in (AD) \\ F \in (AC) \\ (GF)//(BC) \end{cases}$ on peut donc appliquer le théorème de Thalès donc $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AG}{AD}$

$\begin{cases} E \in (AB) \\ F \in (AC) \\ (GF)//(DC) \end{cases}$ on peut donc appliquer le théorème de Thalès donc $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$

On a $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AG}{AD}$ et $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$ donc $\dfrac{AG}{AD} = \dfrac{AE}{AB}$

$\begin{cases} E \in (AB) \\ G \in (AD) \\ \text{la position de E par rapport à A et B est} \\ \text{la même que celle de G par rapport à A et D} \\ \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{AE}{AB} \end{cases}$ d'après la réciproque du théorème de Thalès (EG)//(BD)

3) a) Si A = E alors $x = 0$ et si E = B alors $x = 12$ donc $\boxed{x \text{ compris entre 0 et 12}}$

b) $\begin{cases} E \in (AB) \\ G \in (AD) \text{ //(BD) d'après 2°} \\ EG \end{cases}$ on applique la propriété de Thalès $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{EG}{BD}$

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AG}{AD}$ donc $\dfrac{x}{12} = \dfrac{AG}{9}$ D'où $AG = \dfrac{9}{12}x$ et donc $\boxed{AG = \dfrac{3}{4}x}$

c) P = 2(AE + AG)

$P(x) = 2\left(x + \dfrac{3}{4}x\right) = 2 \times \dfrac{7}{4}x = \dfrac{7}{2}x$

donc $\boxed{P(x) = \dfrac{7}{2}x}$