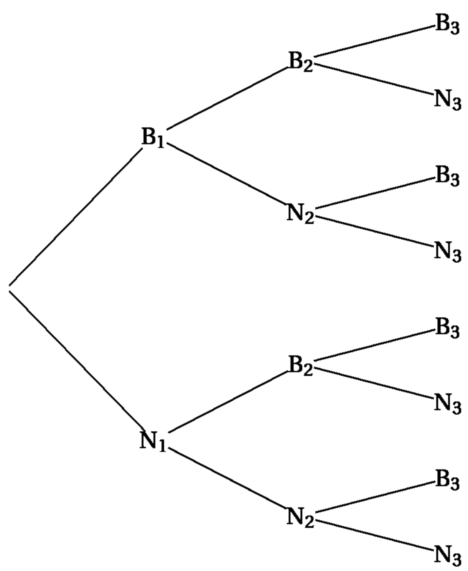
$\boxed{1}$ On rappelle qu'on note $p_B(A)$ la probabilité que l'évènement A se réalise, sachant que l'évènement B est déja réalisé et que : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Une boîte contient 3 boules blanches (en chocolat blanc) et 3 boules noires (en chocolat noir).
Elles sont indiscernables au toucher et donc chaque boule a la même probabilité d'être tirée que les autres.
Marie prend au hasard une boule dans cette boîte, et comme elle adore le chocolat noir, si la boule est noire elle la mange.
Mais elle n'aime pas le chocolat blanc. Si la boule tirée est blanche, elle la remet donc dans la boîte.
Elle effectue ainsi trois tirages successifs.
On note :
B1 l'évènement : « La boule tirée au 1er tirage est blanche » ;
N1 l'évènement : « La boule tirée au 1er tirage est noire » ;
B2 l'évènement : « La boule tirée au 2e tirage est blanche » ;
N2 l'évènement : « La boule tirée au 2e tirage est noire » ;
B3 l'évènement : « La boule tirée au 3e tirage est blanche » ;
N3 l'évènement : « La boule tirée au 3e tirage est noire ».
1° On s'intéresse aux deux premiers tirages.
a) Calculer p(B1) et p(N1).
b) Montrer que $p_{B1}(B2) = \dfrac{1}{2}$ et $p_{N1}(B2) = \dfrac{3}{5}$ puis calculer $p_{B1}(N2)$ et $p_{N1}(N2)$.
Placer les six valeurs trouvées au a) et au b) sur l'arbre donné en annexe.
c) Calculer p (N2 $\cap$B1) et p (N2 $\cap$ N1) puis en déduire que : p (N2) $= \dfrac{9}{20}$
d) Sachant que Marie se régale d'une boule de chocolat noir obtenue au deuxième tirage, quelle est la probabilité qu'elle soit en train de déguster, comme elle le prétend, sa deuxième boule de chocolat noir ?
2° On considère l'ensemble des trois tirages.
a) Finir de compléter l'arbre de probabilité donné en annexe 2.
b) Quelle est la probabilité qu'il ne reste plus de boule de chocolat noir dans la boîte après ces trois tirages ?

Annexe 2 : (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 3) :
exercice 3, questions 1 b et 2 a



$\boxed{2}$ Un directeur de société engage un jeune technicien et lui propose deux types de rémunération à partir du 1er janvier 2000.

1° Premier type de rémunération

Pour cette première année 2000, il percevra 22 400 euros, puis une augmentation annuelle constante de 750 euros. On note U_0 le salaire en euros pour l'année 2000, U_1, le salaire en euros pour l'année 2001, et d'une manière générale U_n le salaire en euros pour l'année 2000+n (pour n entier naturel).

a) Calculer les salaires annuels U_1, pour l'année 2001 et U_2 pour l'année 2002.

b) Préciser la nature de la suite (U_n) en indiquant sa raison.

c) Montrer que $U_n = 22\,400 + 750\,n$.

2° Deuxième type de rémunération

Pour l'année 2000, il percevra aussi 22 400 euros, mais ensuite chaque année une augmentation de 3 % par rapport à l'année précédente.

Dans ce cas, on note V_n Ie montant en euros de la rémunération pour l'année 2000 + n (pour n entier naturel).

a) Calculer les salaires annuels V_1, pour l'année 2001 et V_2 pour l'année 2002.

b) Montrer que $V_{n+1} = 1{,}03\ V_n$ pour tout n. En déduire la nature de la suite (V_n).

c) En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

3° Comparaison

a) Calculer dans chacun des deux cas le salaire annuel pour l'année 2008.

b) Pour cette année 2008, préciser le type de rémunération le plus avantageux.

$\boxed{3}$ Deux amies, Agnès et Bénédicte gagnent 2 000 € à un jeu.

Elles partagent cette somme en deux parts égales.

Partie A Agnès, qui a déjà 3000 € d'économies, ajoute ses 1000 € à ses économies et place le total sur un livret d'épargne qui rapporte 3,5 % d'intérêts par an (intérêts composés). On note U_0 le capital placé ($U_0 = 4000$), U_1 le capital acquis au bout d'un an, et plus généralement U_n le capital acquis au bout de n années.

1° Calculer U_1 et U_2.

2° Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite (U_n).

3° Exprimer le terme général U_n en fonction de n.

4° Quel sera le capital obtenu au bout de 6 ans ? (On arrondira le résultat au centime).

Partie B Bénédicte choisit un compte épargne dont le taux mensuel est de 0,25 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 50 €. Les intérêts acquis sont capitalisés à la fin de chaque mois.

On note y_0 le capital placé ($y_0 = 1\,000$), y_1 le capital acquis au bout d'un mois, et plus généralement y_n le capital acquis au bout de n mois.

1° Calculer y_1 et y_2 (on arrondira le résultat au centime). Vérifier que $y_3 = 1\,157{,}89$.

2° Pour tout entier naturel n, exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

3° On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n + 20\,000$.

a) Démontrer que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison 1,002 5. Préciser W_n et exprimer le terme général W_n en fonction de n. En déduire V_n en fonction de n.

b) Calculer le capital acquis par Bénédicte au bout de 6 ans (soit 72 mois). (On arrondira le résultat au centime).

$\boxed{4}$ Le célèbre tableau de DAVID : « Le sacre de Napoléon » immortalise l'évènement du 2 décembre 1804.

Sur la période considérée, toutes les années dont le millésime est multiple de 4 sont bissextiles, sauf l'année 1900. Considérons le 2 décembre 1804 comme le jour de rang 1.

1° a) Combien y-a-t-il d'années dont le millésime est compris entre 1805 (inclus) et 2003 (inclus) ?

b) Parmi ces années, montrer qu'il y a 48 années bissextiles.

2° Prouver que le rang du 1er janvier 2004 est 72 714.

3° Déterminer l'entier a compris entre 0 et 6 inclus tel que : 72 714 à (modulo 7).

4° Sachant que le 1er janvier 2004 était un jeudi, recopier et compléter le tableau suivant où k désigne un nombre entier :

Rang du jour	$7k$	$7k+1$	$7k+2$	$7k+3$	$7k+4$	$7k+5$	$7k+6$	
Jour de la semaine								

5° Quel jour de la semaine, Napoléon Ier a-t-il été sacré empereur ?

$\boxed{5}$ Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9.

Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers.
On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code. La clé de contrôle x_7 est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme : $N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + x_4 + x_6)$.
1° a) Vérifier que le code suivant est correct : 2 3 4 1 5 4 7.
b) Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1.
c) Un des chiffres du code suivant a été effacé : 1 1 2 • 7 7 4. Le calculer.
2° Dans cette question un des chiffres du code est erroné au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, le dactylographe a frappé $x_1x_2x_3yx_5x_6x_7$.
a) Ecrire les sommes N_1 et N_2 associées respectivement aux deux codes précédents puis calculer la différence $N_1 - N_2$.
b) Montrer que l'équation $7\,a \equiv 0$ [modulo 10] où a est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.
c) L'erreur de frappe sera-t-elle détectée ?
3° Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, le dactylographe a frappé $x_1x_3x_2x_4x_5x_6x_7$.
a) Ecrire les sommes N_1 et N_2 associées à ces deux codes, puis calculer la différence $N_1 - N_2$.
b) Donner un exemple de valeurs de x_2 et x_3 pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

$\boxed{6}$ Un malade souffrant d'angine va consulter son médecin. L'agent infectieux a 4 chances sur 5 d'être un streptocoque. Le médecin décide de faire des analyses en laboratoire. Les techniques de laboratoire comportent des risques d'erreur :

- Le streptocoque, lorsqu'il est présent, a 1 chance sur 5 de ne pas être décelé.
- Le streptocoque, lorsqu'il est absent, a 1 chance sur 10 d'être décelé par erreur.

On note S l' évènement : « Le streptocoque est présent » et D l'évènement « Le streptocoque est décelé ».
Partie A Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Le médecin fait procéder à une première analyse.
1° Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le streptocoque est présent et est décelé ».
2° Montrer que la probabilité P(D) que le streptocoque soit décelé est égale à $\dfrac{33}{50}$
3° Le streptocoque est décelé. Quelle est la probabilité pour qu'il soit présent ?
Partie B Dans cette partie, les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millième.
Pour confirmer son diagnostic, le médecin fait analyser quatre autres prélèvements faits sur ce patient.
(Les quatre tests sont réalisés dans les mêmes conditions et sont indépendants). Quelle est la probabilité pour que le streptocoque soit décelé dans exactement trois tests parmi les quatre ?

$\boxed{7}$ Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité : « Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 ».
1° **Un exemple** a) Pour un entier naturel n, que signifie La phrase « n est congru à 1 modulo 3 » ?
Traduire à l'aide d'une congruence « n est divisible par 3 ».
b) Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 :
10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif.
c) Déterminer le plus petit entier, positif auquel est congru le nombre 4520 modulo 3.
On remarquera que $4\,520 = 4 \times 1\,000 + 5 \times 100 + 2 \times 10$.
d) En utilisant la question b) trouver le reste de la division de 5 112 par 3.
2° **Quelques généralisations** On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que $a \neq 0$ et $N = 1\,000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$.
Le chiffre des unités est d, celui des dizaines c, des centaines b et des milliers a.
a) Montrer que $N \equiv a + b + c + d$ modulo 3.
b) Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.
c) Enoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.

$\boxed{1}$ On rappelle qu'on note pB(A) la probabilité que l'évènement A se réalise, sachant que l'évènement B est déja réalisé et que : $pB(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. Une boîte contient 3 boules blanches (en chocolat blanc) et 3 boules noires (en chocolat noir). Elles sont indiscernables au toucher et donc chaque boule a la même probabilité d'être tirée que les autres. Marie prend au hasard une boule dans cette boîte, et comme elle adore le chocolat noir, si la boule est noire elle la mange. Mais elle n'aime pas le chocolat blanc. Si la boule tirée est blanche, elle la remet donc dans la boîte. Elle effectue ainsi trois tirages successifs. On note : B1 l'évènement : « La boule tirée au 1er tirage est blanche » ; N1 l'évènement : « La boule tirée au 1er tirage est noire » ; B2 l'évènement : « La boule tirée au 2e tirage est blanche » ; N2 l'évènement : « La boule tirée au 2e tirage est noire » ; B3 l'évènement : « La boule tirée au 3e tirage est blanche » ; N3 l'évènement : « La boule tirée au 3e tirage est noire ». 1° On s'intéresse aux deux premiers tirages. a) Calculer p(B1) et p(N1).

La boîte contient 3 boules blanches et 3 boules noires donc $P(B1) = p(N1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) Montrer que $pB1(B2) = \frac{1}{2}$ et $pN1(B2) = \frac{3}{5}$ puis calculer pB1(N2) et pN1(N2). Placer les six valeurs trouvées au a) et au b) sur l'arbre donné en annexe.

Si la boule tirée est blanche, elle est remise dans la boîte donc $P_{B1}(B2) = p(B1) = \frac{1}{2}$

Si la boule est noire elle est mangée donc non remise dans la boîte qui contient alors 3 blanches et deux noires donc $p_{N1}(B2) = \frac{3}{5}$

$p_{B1}(N2) = 1 - p_{B1}(B2) = \frac{1}{2}$ et et $p_{N1}(N2) = 1 - p_{N1}(B2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

c) Calculer p (N2 ∩B1) et p (N2 ∩ N1) puis en déduire que : $p\ (N2) = \frac{9}{20}$

$p\ (N2 \cap B1) = p_{B1}(N2) \times p(B1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $p\ (N2 \cap N1) = p_{N1}(N2) \times p(N1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

On a donc : $p\ (N2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$

d) Sachant que Marie se régale d'une boule de chocolat noir obtenue au deuxième tirage, quelle est la probabilité qu'elle soit en train de déguster, comme elle le prétend, sa deuxième boule de chocolat noir ?

$$p_{N2}(N1) = \frac{p(N1 \cap N2)}{p(N2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{4}{9}$$

2° On considère l'ensemble des trois tirages. a) Finir de compléter l'arbre de probabilité donné en annexe 2.
b) Quelle est la probabilité qu'il ne reste plus de boule de chocolat noir dans la boîte après ces trois tirages ?
$p(N1 \cap N2 \cap N3) =$

$\boxed{2}$ Un directeur de société engage un jeune technicien et lui propose deux types de rémunération à partir du 1er janvier 2000. 1°

Premier type de rémunération Pour cette première année 2000, il percevra 22 400 euros, puis une augmentation annuelle constante de 750 euros. On note U0 le salaire en euros pour l'année 2000, U1, le salaire en euros pour l'année 2001, et d'une manière générale Un le salaire en euros pour l'année 2000+n (pour n entier naturel). a) Calculer les salaires annuels U1, pour l'année 2001 et U2 pour l'année 2002.

$U_1 = U_0 + 750 = 23\ 150$ et $U_2 = 23\ 150 + 750 = 23\ 900$.

b) Préciser la nature de la suite (Un) en indiquant sa raison.

(U_n) et une suite arithmétique de raison 750 de premier terme 22 400

c) Montrer que Un = 22 400 + 750 n.

$U_n = U_0 + 750 \times n = 22\ 400 + 750\ n$.

2° Deuxième type de rémunération Pour l'année 2000, il percevra aussi 22 400 euros, mais ensuite chaque année une augmentation de 3 % par rapport à l'année précédente. Dans ce cas, on note Vn Ie montant en euros de la rémunération pour l'année 2000 + n (pour n entier naturel). a) Calculer les salaires annuels V1, pour l'année 2001 et V2 pour l'année 2002.

$V_1 = V_0 \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 1{,}03\ V_0 = 23\ 072$ et $V_2 = 1{,}03 \times 23\ 072 = 23\ 764{,}16$.

b) Montrer que $V_{n+1} = 1{,}03\ V_n$ pour tout n. En déduire la nature de la suite (V_n).

$V_{n+1} = V_n \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 1{,}03\ V_n$ donc la suite (V_n) est géométrique de raison 1,03 de premier terme $V_0 = 22\ 400$.

c) En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

$V_n = V_0 \times (1{,}03)^n = 22\ 400 \times (1{,}03)^n$

3° Comparaison a) Calculer dans chacun des deux cas le salaire annuel pour l'année 2008.

$U_8 = 28\ 400$ et $V_8 = 28\ 675{,}65$

b) Pour cette année 2008, préciser le type de rémunération le plus avantageux.

La deuxième rémunération est plus avantageuse.

Baccalauréat L Antilles–Guyane juin 2004

$\boxed{3}$ Deux amies, Agnès et Bénédicte gagnent 2 000 € à un jeu. Elles partagent cette somme en deux parts égales.

Partie A Agnès, qui a déjà 3000 € d'économies, ajoute ses 1000 € à ses économies et place le total sur un livret d'épargne qui rapporte 3,5 % d'intérêts par an (intérêts composés). On note U0 le capital placé (U0 = 4000), U1 le capital acquis au bout d'un an, et plus généralement Un le capital acquis au bout de n années. 1° Calculer U1 et U2.

$U_1 = 4000 \times \left(1 + \dfrac{3{,}5}{100}\right) = 1{,}035 \times 4000 = 4140$ et $V_2 = 1{,}035 \times 4140 = 4284{,}9$.

2° Exprimer Un+1 en fonction de Un. En déduire la nature de la suite (Un).

$U_{n+1} = 1{,}035 \times U_n$. la suite (U_n) est géométrique de raison 1,035 de premier terme $U_0 = 4000$.

3° Exprimer le terme général Un en fonction de n.

$U_n = U_0 \times (1{,}035)^n = 4000 \times (1{,}035)^n$

4° Quel sera le capital obtenu au bout de 6 ans ? (On arrondira le résultat au centime).

$U_6 = 4000 \times (1{,}035)^6 = 4917{,}02$

Partie B Bénédicte choisit un compte épargne dont le taux mensuel est de 0,25 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 50 €. Les intérêts acquis sont capitalisés à la fin de chaque mois.

On note V0 le capital placé (V0 = 1 000), V1 le capital acquis au bout d'un mois, et plus généralement Vn le capital acquis au bout de n mois. 1° Calculer V1 et V2 (on arrondira le résultat au centime). Vérifier que V3 = 1 157,89.

$V_1 = \left(1 + \dfrac{0{,}25}{100}\right) \times V_0 + 50 = 1{,}0025 \times 1000 + 50 = 1052{,}5$ et $V_2 = 1{,}0025 \times 1052{,}5 + 50 = 1105{,}13$

$V_3 = 1{,}0025 \times 1105{,}13 + 50 = 1157{,}89$

2° Pour tout entier naturel n, exprimer Vn+1 en fonction de Vn.

$V_{n+1} = 1{,}0025 \times V_n + 50$

3° On considère la suite (Wn) définie pour tout entier naturel n par Wn = Vn + 20 000. a) Démontrer que la suite (Wn) est une suite géométrique de raison 1,0025. Préciser Wn et exprimer le terme général Wn en fonction de n. En déduire Vn en fonction de n.

$W_{n+1} = V_{n+1} + 20\ 000 = 1{,}0025\ V_n + 50 + 20\ 000 = 1{,}0025\ V_n + 20\ 050$

$W_n = V_n + 20\ 000$ donc $V_n = W_n - 20\ 000$ et $W_{n+1} = 1{,}0025\ (W_n - 20\ 000) + 20\ 050 = 1{,}0025\ W_n$

$W_0 = V_0 + 20\ 000 = 21\ 000$ et $W_n = 21\ 000 \times (1{,}0025)^n$

$V_n = W_n - 20\ 000 = 21\ 000 \times (1{,}0025)^n - 20\ 000$

b) Calculer le capital acquis par Bénédicte au bout de 6 ans (soit 72 mois). (On arrondira le résultat au centime).

$V_6 = 21\ 000 \times (1{,}0025)^{72} - 20\ 000 = 5135{,}92$.

4 Le célèbre tableau de DAVID : « Le sacre de Napoléon » immortalise l'évènement du 2 décembre 1804. Sur la période considérée, toutes les années dont le millésime est multiple de 4 sont bissextiles, sauf l'année 1900. Considérons le 2 décembre 1804 comme le jour de rang 1. 1° a) Combien y-a-t-il d'années dont le millésime est compris entre 1805 (inclus) et 2003 (inclus) ?

$2003 - 1805 + 1 = 199$

b) Parmi ces années, montrer qu'il y a 48 années bissextiles.

$199 = 4 \times 49 + 3$

Il y a donc 49 années dont le millésime est multiple de 4. Toutes sont bissextiles, excepté l'année 1900.

Il y a donc 48 années bissextiles de 366 jours.

2° Prouver que le rang du 1er janvier 2004 est 72 714.

Le 2 décembre 1804 comme le jour de rang 1. donc le 1er janvier 1805 est le jour de rang 31.

$199 - 48 = 151$. 151 années ne sont pas 48 années bissextiles et ont donc 365 jours.

48 années bissextiles de 366 jours

$48 \times 366 + 151 \times 365 = 72683$. Donc le 1er janvier 2004 est le jour de rang $31 + 72\,683 = 72\,714$.

3° Déterminer l'entier a compris entre 0 et 6 inclus tel que : 72 714 à (modulo 7).

$72\,714 = 5 + 10\,307 \times 7$ donc $a = 5$.

4° Sachant que le 1er janvier 2004 était un jeudi, recopier et compléter le tableau suivant où k désigne un nombre entier :

Rang du jour	$7k$	$7k+1$	$7k+2$	$7k+3$	$7k+4$	$7k+5$	$7k+6$
Jour de la semaine	samedi	dimanche	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi

5° Quel jour de la semaine, Napoléon Ier a-t-il été sacré empereur ?

Un dimanche

---

5 Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers. On notera x1x2x3x4x5x6x7 un tel code. La clé de contrôle x7 est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme : N = (x1 + x3 + x5) + 7 (x2 + x4 + x6).

1° a) Vérifier que le code suivant est correct : 2 3 4 1 5 4 7.

$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 1, x_5 = 4$ et $x_6 = 7$.

$2 + 4 + 5 + 7\,(3 + 1 + 4) = 11 + 7 \times 8 = 67 = 6 \times 10 + 7$.

b) Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1.

$9 + 3 + 5 + 7 \times (2 + 4 + 1) = 66 = 6 \times 10 + 6$. La clé est donc 6.

c) Un des chiffres du code suivant a été effacé : 1 1 2 • 7 7 4. Le calculer.

On note x ce chiffre. $1 + x + 7 + 7\,(1 + 2 + 7) = 8 + x + 70$.

modulo 10 on a : $x + 8 \equiv 4 \Leftrightarrow x \equiv 4 - 8 \Leftrightarrow x \equiv 10 - 4 \Leftrightarrow x \equiv 6$.

x est un chiffre donc $x = 6$.

2° Dans cette question un des chiffres du code est erroné au lieu de saisir x1x2x3x4x5x6x7, le dactylographe a frappé x1x2x3yx5x6x7.
a) Ecrire les sommes N1 et N2 associées respectivement aux deux codes précédents puis calculer la différence N1 – N2.

$N_1 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + x_4 + x_6)$, $N_2 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + y + x_6)$.

$N_1 - N_2 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + x_4 + x_6) - (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + y + x_6) = 7\,x_4 - 7\,y$

b) Montrer que l'équation 7 a ≡ 0 [modulo 10] où a est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7\,a$	0	7	$14 \equiv 4$	$21 \equiv 1$	$28 \equiv 8$	$35 \equiv 5$	$42 \equiv 2$	$49 \equiv 9$	$56 \equiv 6$	$63 \equiv 3$

variante :

$7 \times a \equiv 0$ si et seulement si $7\,a$ est divisible par 10 et le seul entier compris entre 0 et 9 divisible par 10 est 0.

c) L'erreur de frappe sera-t-elle détectée ?

La clé de contrôle ne détecte pas l'erreur quand $N_1 - N_2 \equiv 0$ modulo 10 c'est à dire quand $7\,x_4 - 7\,y \equiv 0$ modulo 10

$7\,x_4 - 7\,y \equiv 0$ modulo $10 \Leftrightarrow x_4 = y$ donc si $x_4 \neq y$ on a $N_1 - N_2 \neq 0$ et donc la clé détecte l'erreur

3° Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir x1x2x3x4x5x6x7, le dactylographe a frappé x1x3x2x4x5x6x7. a) Ecrire les sommes N1 et N2 associées à ces deux codes, puis calculer la différence N1 – N2.

$N_1 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + x_4 + x_6)$, $N_2 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + y + x_6)$.

$N_1 - N_2 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7\,(x_2 + x_4 + x_6) - (x_1 + x_2 + x_5) + 7\,(x_2 + x_3 + x_6) = x_3 - x_2 + 7\,(x_2 - x_3) = 6\,(x_2 - x_3)$

b) Donner un exemple de valeurs de x2 et x3 pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

La clé de contrôle ne détecte pas l'erreur quand $N_1 - N_2 \equiv 0$ modulo 10 c'est à dire quand $6\,(x_2 - x_3) \equiv 0$ modulo 10.

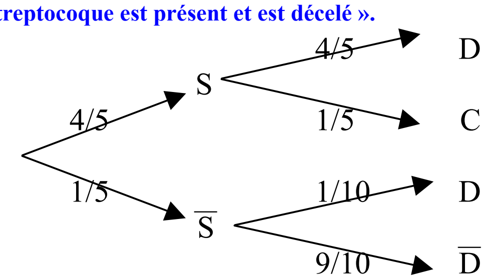
Si $x_2 - x_3 = 5$ alors $6\,(x_2 - x_3) \equiv 0$ modulo 10

Si $x_2 = 7$ et $x_3 = 2$ alors la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

$\boxed{6}$ Un malade souffrant d'angine va consulter son médecin. L'agent infectieux a 4 chances sur 5 d'être un streptocoque. Le médecin décide de faire des analyses en laboratoire. Les techniques de laboratoire comportent des risques d'erreur : Le streptocoque, lorsqu'il est présent, a 1 chance sur 5 de ne pas être décelé. Le streptocoque, lorsqu'il est absent, a 1 chance sur 10 d'être décelé par erreur. On note S l' évènement : « Le streptocoque est présent » et D l'évènement « Le streptocoque est décelé ».

Partie A Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles. Le médecin fait procéder à une première analyse. 1° Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le streptocoque est présent et est décelé ».

$$p(S \cap D) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$



2° Montrer que la probabilité P(D) que le streptocoque soit décelé est égale à $\frac{33}{50}$

$$p(D) = \frac{16}{25} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{33}{50}$$

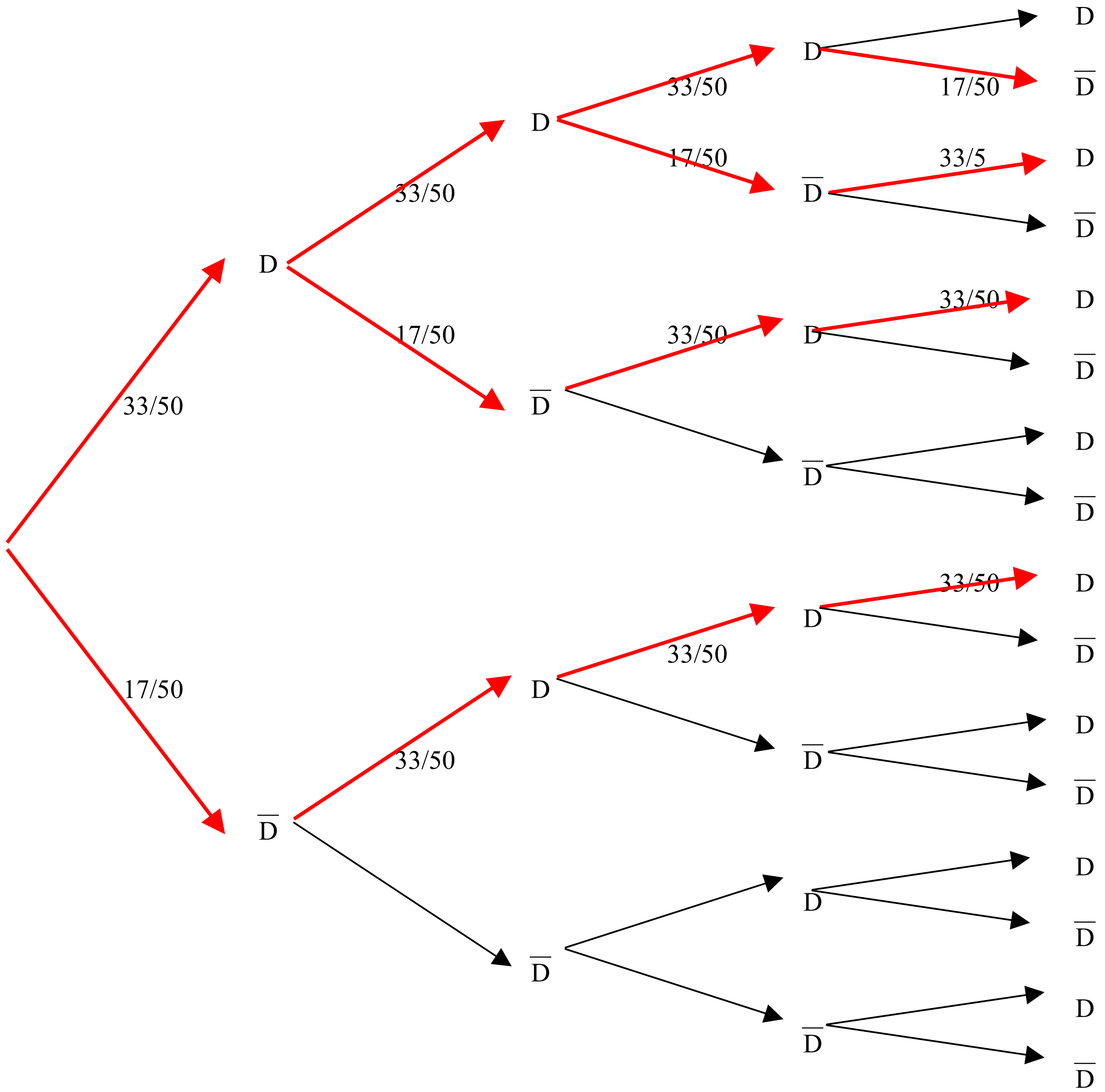
3° Le streptocoque est décelé. Quelle est la probabilité pour qu'il soit présent ?

$$p_D(S) = \frac{p(S \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{33}{50}} = \frac{16}{25} \times \frac{50}{33} = \frac{32}{33}$$

Partie B Dans cette partie, les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millième. Pour confirmer son diagnostic, le médecin fait analyser quatre autres prélèvements faits sur ce patient. (Les quatre tests sont réalisés dans les mêmes conditions et sont indépendants). Quelle est la probabilité pour que le streptocoque soit décelé dans exactement trois tests parmi les quatre ?

Hors programme.

$$\frac{33}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{17}{50} + \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{17}{50} \times \frac{33}{50} + \frac{33}{50} \times \frac{17}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} + \frac{17}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} = 4 \times \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{33}{50} \times \frac{17}{50} \approx 0{,}3910$$



$\boxed{7}$ Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité : « Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 ». 1° Un exemple a) Pour un entier naturel n, que signifie La phrase « n est congru à 1 modulo 3 » ? Traduire à l'aide d'une congruence « n est divisible par 3 ».

$n \equiv 1$ modulo 3 signifie que $n - 1$ est divisible par 3.

n divisible par 3 si et seulement si $n \equiv 0$ modulo 3.

b) Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1 000, 10p où p est un entier positif.

Modulo 3 on a :

$10 \equiv 1$; $100 \equiv 1^2$ donc $100 \equiv 1$, $1000 \equiv 1^3$ donc $1000 \equiv 1$, $10^p \equiv 1^p$ donc $10^p \equiv 1$

c) Déterminer le plus petit entier, positif auquel est congru le nombre 4520 modulo 3.
On remarquera que 4 520 = 4 × 1 000+5 × 100 + 2 × 10.

Modulo 3 on a : $10 \equiv 1$, $100 \equiv 1$ et $1000 \equiv 1$ donc

$4 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 \equiv 4 \times 1 + 5 \times 1 + 2$ donc $4\,520 \equiv 11$ donc $4\,520 \equiv 1$

d) En utilisant la question b) trouver le reste de la division de 5 112 par 3.

Modulo 3 on a :

$5\,112 \equiv 5 + 1 + 1 + 2$ et $5 + 1 + 1 + 2 \equiv 0$ donc $5\,112 \equiv 0$.

2° Quelques généralisations On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que a ≠ 0 et N = 1 000 × a + 100 × b + 10 × c +d. Le chiffre des unités est d, celui des dizaines c, des centaines b et des milliers a.

a) Montrer que N ≡ a + b + c + d modulo 3.

Modulo 3 on a :$10 \equiv 1$, $100 \equiv 1$ et $1000 \equiv 1$ donc

$1\,000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \equiv 1 \times a + 1 \times b + 1 \times c + d$.

b) Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.

Modulo 3 on a :

$N \equiv 0 \Leftrightarrow a + b + c + d \equiv 0$

N divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres est divisible par 3.

c) Enoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.

N divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres est divisible par 9.

Soit $N = 1\,000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$

Modulo 9 on a :$10 \equiv 1$, $100 \equiv 1$ et $1000 \equiv 1$ donc

$1\,000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \equiv 1 \times a + 1 \times b + 1 \times c + d$.

Modulo 9 on a :

$N \equiv 0 \Leftrightarrow a + b + c + d \equiv 0$

N divisible par 9 si et seulement si $a + b + c + d$ est divisible par 9.