

UN PEU D'ARITHMETIQUE

Exercice 1 : Vérifier que les entiers suivants sont des multiples de 37 :

1° Les nombres constitués de trois chiffres identiques (comme 222, 888...)

2° Les nombres constitués de six chiffres identiques (comme 555555, 999999...)

3° Les nombres de six chiffres obtenus en juxtaposant trois fois deux chiffres identiques (comme 717171...).

Exercice 2 : Dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, on dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (autre que lui-même). Vérifier que les nombres 6, 28 et 496 sont parfaits.

Exercice 3 :

1° Dresser la liste des diviseurs de 420 puis celle des diviseurs de 1386.

2° Dresser la liste des diviseurs communs à 420 et à 1386.

3° Calculer le PGCD de 420 et de 1386. Quels sont les diviseurs de ce PGCD ?

Exercice 4 :

1° Chercher les multiples de 15 qui sont aussi multiples de 22.

2° Chercher les multiples de 15 qui sont aussi multiple de 30.

3° Chercher les multiples de 15 qui sont aussi multiples de 99.

Exercice 5 :

1° Démontrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est pair.

2° Le produit de trois entiers naturels consécutifs est-il :

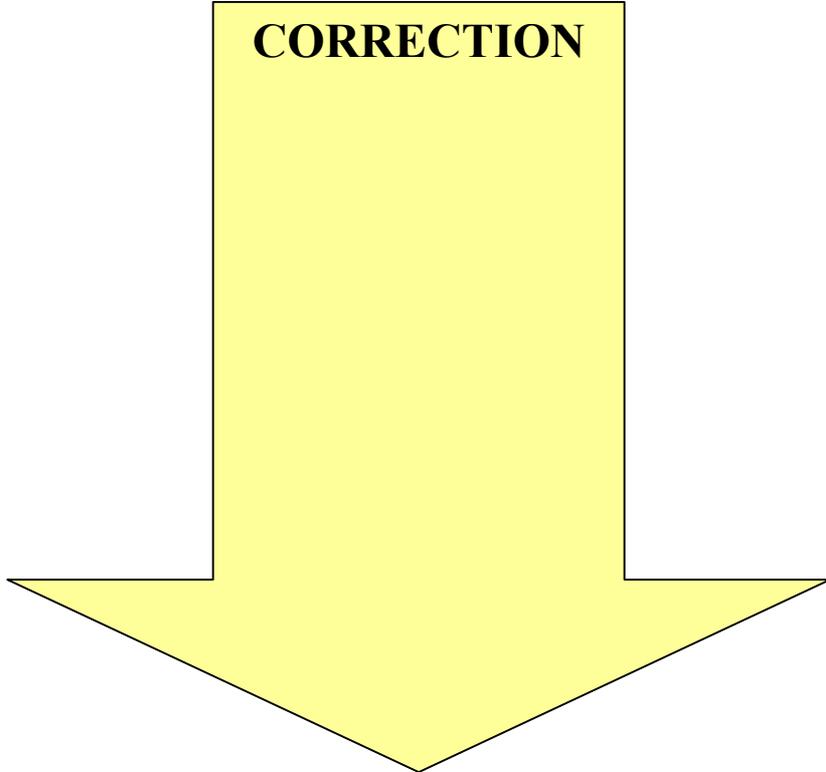
a) pair ?

b) un multiple de 3 ?

c) Un multiple de 6 ?

Vous justifierez chacune de vos réponses (si besoin est, utilisez la table de votre calculatrice pour conjecturer votre réponse).

CORRECTION



Exercice 1 : Vérifier que les entiers suivants sont des multiples de 37 :

1° Les nombres constitués de trois chiffres identiques (comme 222, 888...)

222, 333, 444, ... 999 sont tous divisibles par 111 et $111 = 3 \times 37$

2° Les nombres constitués de six chiffres identiques (comme 555555, 999999...)

$111111 = 111000 + 111 = 111 (1000 + 1)$

111111 est divisible par 11 donc par 37.

222222, 333333, 444444, ... 999999 sont tous divisibles par 111111 donc par 111 donc par 37.

3° Les nombres de six chiffres obtenus en juxtaposant trois fois deux chiffres identiques (comme 717171...).

$717171 = 710000 + 7100 + 71 = 71 (10000 + 100 + 1) = 71 \times 10101 = 37 \times 2730$

Soit a et b deux chiffres.

$ababab = a \times 10^5 + b \times 10^4 + a \times 10^3 + b \times 10^2 + a \times 10 + b$

$= (a \times 10 + b) 10^4 + (a \times 10 + b) \times 10^2 + (a \times 10 + b) = (a \times 10 + b) (10^4 + 10^2 + 1) = (a \times 10 + b) \times 101010$.

ababab est donc divisible par 101010 donc divisible par 37.

Exercice 2 : Dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, on dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (autre que lui-même). Vérifier que les nombres 6, 28 et 496 sont parfaits.

$6 = 2 \times 3$. Diviseurs de 6 : 1, 2, 3 et $1 + 2 + 3 = 6$.

$28 = 2^2 \times 7$. Diviseurs de 28: 1, 2, 4, 7, 14 et $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

$496 = 2^4 \times 31$. Diviseur de 496 : 1, 31, 62, 124, 248, 2, 4, 8, 16 et $1 + 31 + 62 + 124 + 248 + 2 + 4 + 8 + 16 = 496$.

Exercice 3 : 1° Dresser la liste des diviseurs de 420 puis celle des diviseurs de 1386.

$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Diviseurs de 420 : 1, 2, 3, 5, 7, 4, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 12, 20, 28, 30, 42, 70, 105, 60, 84, 140, 210,

$1386 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11$. Diviseur de 1386 : 1, 2, 3, 7, 11, 6, 14, 22, 9, 21, 33, 77, 18, 42, 66, 154, 63, 99, 231, 126, 198, 462, 1386

2° Dresser la liste des diviseurs communs à 420 et à 1386.

1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42

3° Calculer le PGCD de 420 et de 1386. Quels sont les diviseurs de ce PGCD ?

42. Diviseur de 42 : 1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42

Exercice 4 : 1° Chercher les multiples de 15 qui sont aussi multiples de 22.

$15 = 3 \times 5$ et $22 = 2 \times 11$. Tous les multiples de $15 \times 22 = 330$.

2° Chercher les multiples de 15 qui sont aussi multiple de 30.

Tous les multiples de 30.

3° Chercher les multiples de 15 qui sont aussi multiples de 99. Quelle propriété peut-on conjecturer pour les multiples communs à deux entiers naturels m et n ?

$15 = 3 \times 5$ et $99 = 3 \times 3 \times 11$. PPCM : $3 \times 5 \times 11$

Exercice 5 : 1° Démontrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est pair.

Le produit de deux entiers naturels consécutifs est de la forme $n(n+1)$.

Deux cas se présentent alors.

➤ n est pair

Alors 2 divise n donc 2 divise $n \times (n+1)$

➤ n est impair

Alors $n+1$ est pair donc 2 divise $n+1$ donc 2 divise $n(n+1)$

2° Le produit de trois entiers naturels consécutifs est-il :

Le produit de trois entiers naturels consécutifs est de la forme $n(n+1)(n+2)$.

a) pair ?

On a vu que pour tout entier naturel n , 2 divise $n(n+1)$ donc 2 divise $n(n+1)(n+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est pair

b) un multiple de 3 ?

On considère le reste de la division de n par 3

Trois cas se présentent

➤ le reste de la division par 3 de n est 0

3 divise alors n donc 3 divise aussi $n(n+1)(n+2)$

➤ le reste de la division de n par 3 est 1.

n s'écrit alors $3q+1$ où q est un entier naturel.. On a alors : $n+2 = 3q+1+2 = 3q+3 = 3(q+1)$

3 divise donc $n+2$ donc 3 divise $n(n+1)(n+2)$

➤ le reste de la division de n par 3 est 2.

n s'écrit alors $3q+2$ où q est un entier naturel. On a alors : $n+1 = 3q+2+1 = 3q+3 = 3(q+1)$

3 divise donc $n+1$ donc 3 divise $n(n+1)(n+2)$

c) Un multiple de 6 ?

3 et 2 divisent $n(n+1)(n+2)$ et 3 et 2 sont premiers donc 3×2 divise $n(n+1)(n+2)$

**On utilise un raisonnement dit
" de disjonction des cas "**