EXERCICE 1

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 6x^2 + 120x$ et $g(x) = 40x$.

1° a) Calculer le nombre dérivé $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{3}{10}(x-20)^2$.

b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer $f(10)$, $f(20)$ et $f(40)$.

2° La courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la fonction f est tracée sur la feuille annexe que l'on remettra avec la copie.

a) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse 10.

b) Tracer sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative de la fonction g.

c) Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et la droite T_A se coupent au point d'abscisse 40.

En déduire le tracé de la tangente T_A que l'on réalisera sur la feuille annexe.

Partie B

Le coût exprimé en euros d'une production est fonction du nombre d'unités x fabriquées est égal à $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

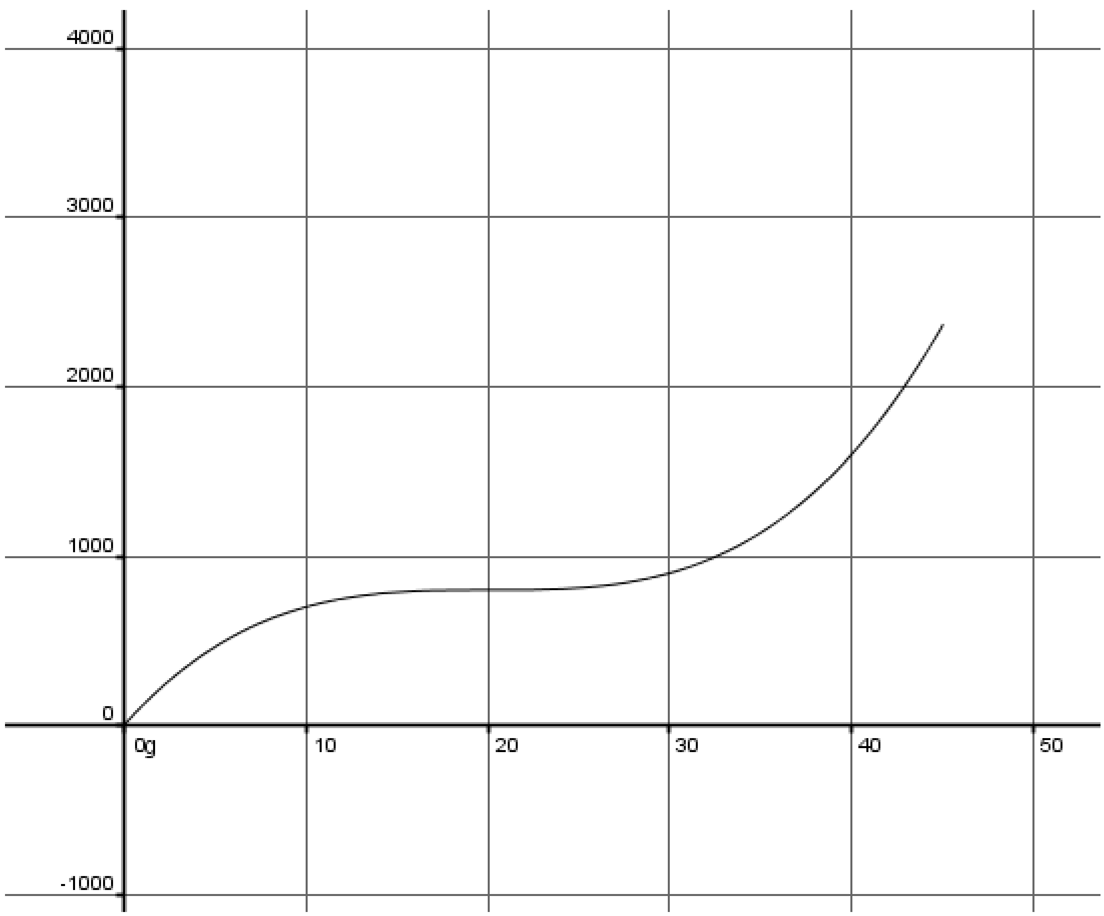
On prendra x dans l'intervalle [0 ; 45].

1° Montrer que pour x unités produites et vendues 40 euros l'unité, le bénéfice en euro s'exprime par $g(x) - f(x)$.

2° a) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle [0 ; 45].

On fera les traits de construction utiles et on vérifiera que les valeurs entières lues sont solutions.

b) Déterminer l'intervalle auquel doit appartenir le nombre d'unités fabriquées x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.



EXERCICE 2

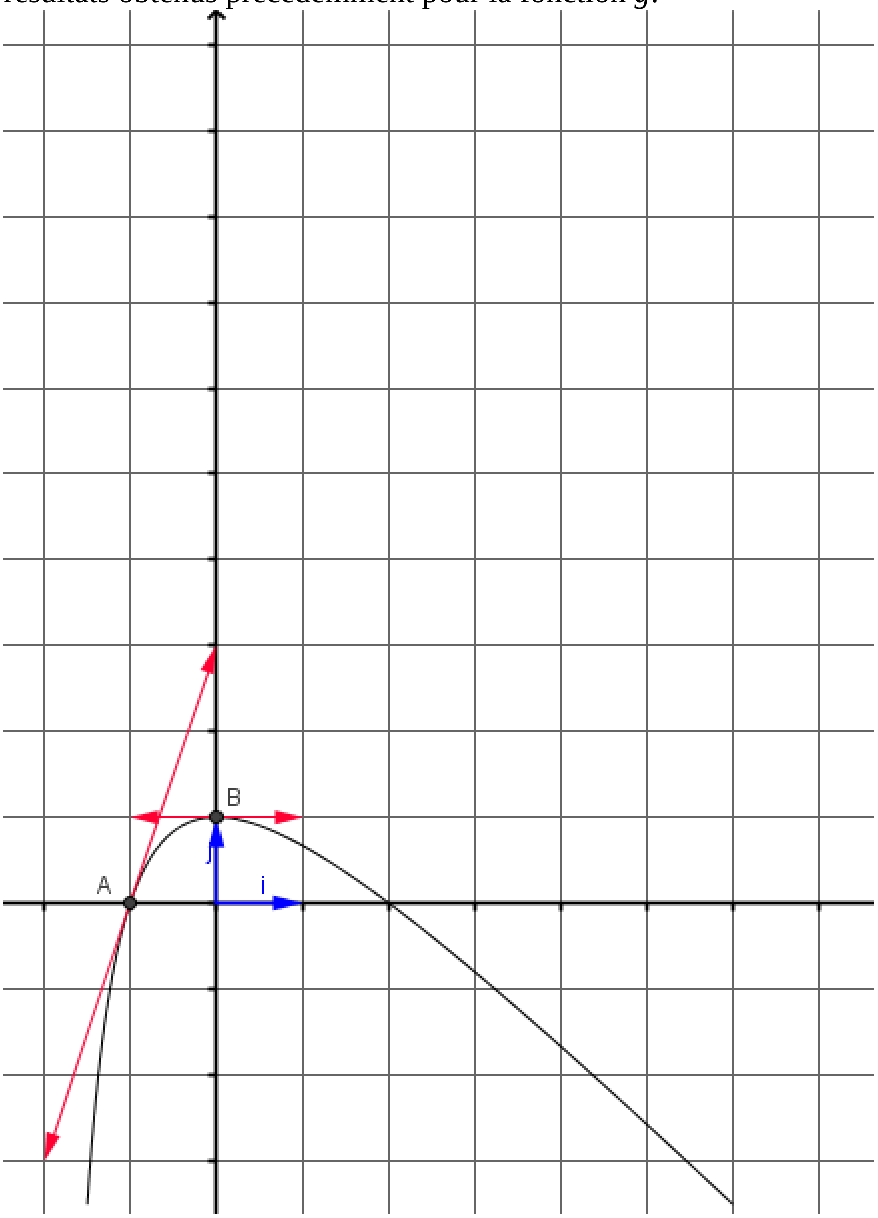
La courbe tracée sur la feuille annexe a été tracée à l'aide d'un ordinateur.
Elle représente, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ une fonction f :

- définie et dérivable sur $]-2 ; +1[$,
- monotone sur $]-2 ; 0]$ et sur $[0 ; +1[$,
- $f(-1,5) = -3,5 = f(6)$

On admet que :

- A, B et C sont des points de cette courbe,
- la tangente au point A passe par le point E,
- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

1° Dans cette question, on donnera les résultats sans justification, en s'appuyant sur l'observation du graphique et les indications fournies par le texte.
a) Déterminer $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$.
b) Donner le signe de $f'(x)$, puis celui de $f(x)$.
2° On définit sur $]-2 ; +\infty[$ la fonction g par $g(x) = [f(x)]^2$.
a) Calculer $g(-1)$, $g(0)$, $g(2)$, $g(-1,5)$ et $g(6)$
b) Sachant que $g'(x) = 2f'(x) \times f(x)$, étudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.
3° Tracer sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, une courbe représentative d'une fonction satisfaisant aux résultats obtenus précédemment pour la fonction g.



Partie A On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 6x^2 + 120x$ et $g(x) = 40x$.

1° a) Calculer le nombre dérivé $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{3}{10}(x-20)^2$.

$f'(x) = \frac{1}{10} \times 3x^2 - 2 \times 6x^2 + 120 = \frac{3}{10}\left(x^2 - 2 \times 6 \times \frac{10}{3} x^2 + \frac{10}{3} \times 120\right) = \frac{3}{10}(x^2 - 40x + 400) = \frac{3}{10}(x-20)^2$. 3

b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante 3

c) Calculer $f(10)$, $f(20)$ et $f(40)$.

$f(10) = 700$, $f(20) = 800$et $f(40) = 1\,600$. 1,5

2° La courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la fonction f est tracée sur la feuille annexe que l'on remettra avec la copie.
a) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse 10.

$f(10) = 700$ et $f'(10) = 30$

$y = 700 + 30(x - 10) \Leftrightarrow y = 700 + 30x - 300 \Leftrightarrow y = 30x + 400$. 2

b) Tracer sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative de la fonction g. c) Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et la droite T_A se coupent au point d'abscisse 40. En déduire le tracé de la tangente T_A que l'on réalisera sur la feuille annexe.

$f(40) = 1\,600$ et $g(40) = 40 \times 40 = 1600$ et $400 + 30 \times 40 = 400 + 1\,200 = 1\,600$ 2

Partie B Le coût exprimé en euros d'une production est fonction du nombre d'unités x fabriquées est égal à $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A. On prendra x dans l'intervalle [0 ; 45].
1° Montrer que pour x unités produites et vendues 40 euros l'unité, le bénéfice en euro s'exprime par $g(x) - f(x)$.

Si on vend x unité à 1 euro l'unité alors le prix de vente est égal à $40x = g(x)$.

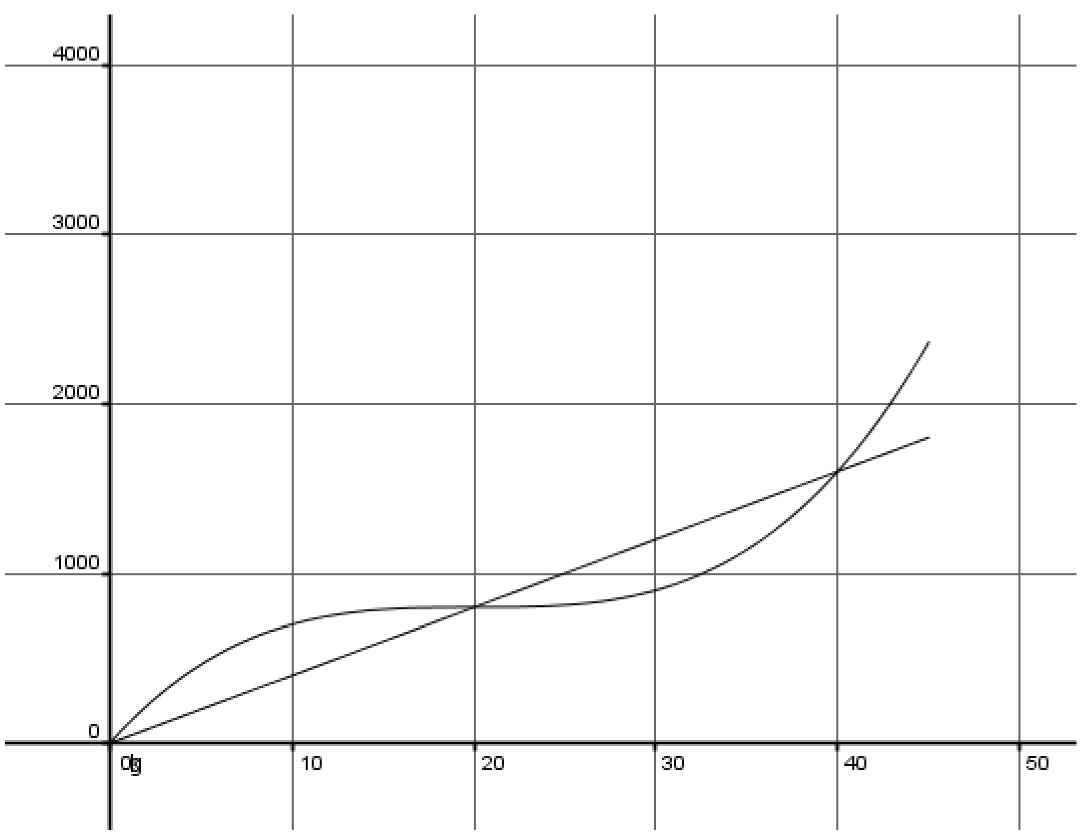
Le bénéfice est donc égale $f(x) - g(x)$. 1

2° a) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle [0 ; 45].
On fera les traits de construction utiles et on vérifiera que les valeurs entières lues sont solutions.

$x \approx 20$ et $x \approx 40$. 1

b) Déterminer l'intervalle auquel doit appartenir le nombre d'unités fabriquées x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

[20 ; 40] 1,5



EXERCICE 2

La courbe tracée sur la feuille annexe a été tracée à l'aide d'un ordinateur.
Elle représente, dans un plan muni d'un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) une fonction *f* :

- **définie et dérivable sur]– 2 ; + 1 [,**
- **monotone sur]– 2 ; 0] et sur [0 ; + 1 [,**
- ***f* (– 1,5) = – 3,5 = *f* (6)**

On admet que :

- **A, B et C sont des points de cette courbe,**
- **la tangente au point A passe par le point E,**
- **la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.**

1° Dans cette question, on donnera les résultats sans justification, en s'appuyant sur l'observation du graphique et les indications fournies par le texte.

a) Déterminer *f* (– 1) = 0, *f* (0) = 1, *f* (2) = 0, *f* '(– 1) = 3 et *f* '(0) = 0. 1 2

b) Donner le signe de *f* '(*x*), puis celui de *f* (*x*).

f est croissante sur [– 1,5 ; 0] donc *f* ' est positive sur [– 1,5 ; 0]

f est décroissante sur [0 ; 6] donc *f* ' est négative sur [0 ; 6] 2

x	– 1,5		– 1	0	2		6
signe de *f* '(*x*)			+	0	–		
variation de *f*	– 3,5	↗	0	1	0	↘	– 3,5
signe de *f* (*x*)		–	0	+	0	–	

2

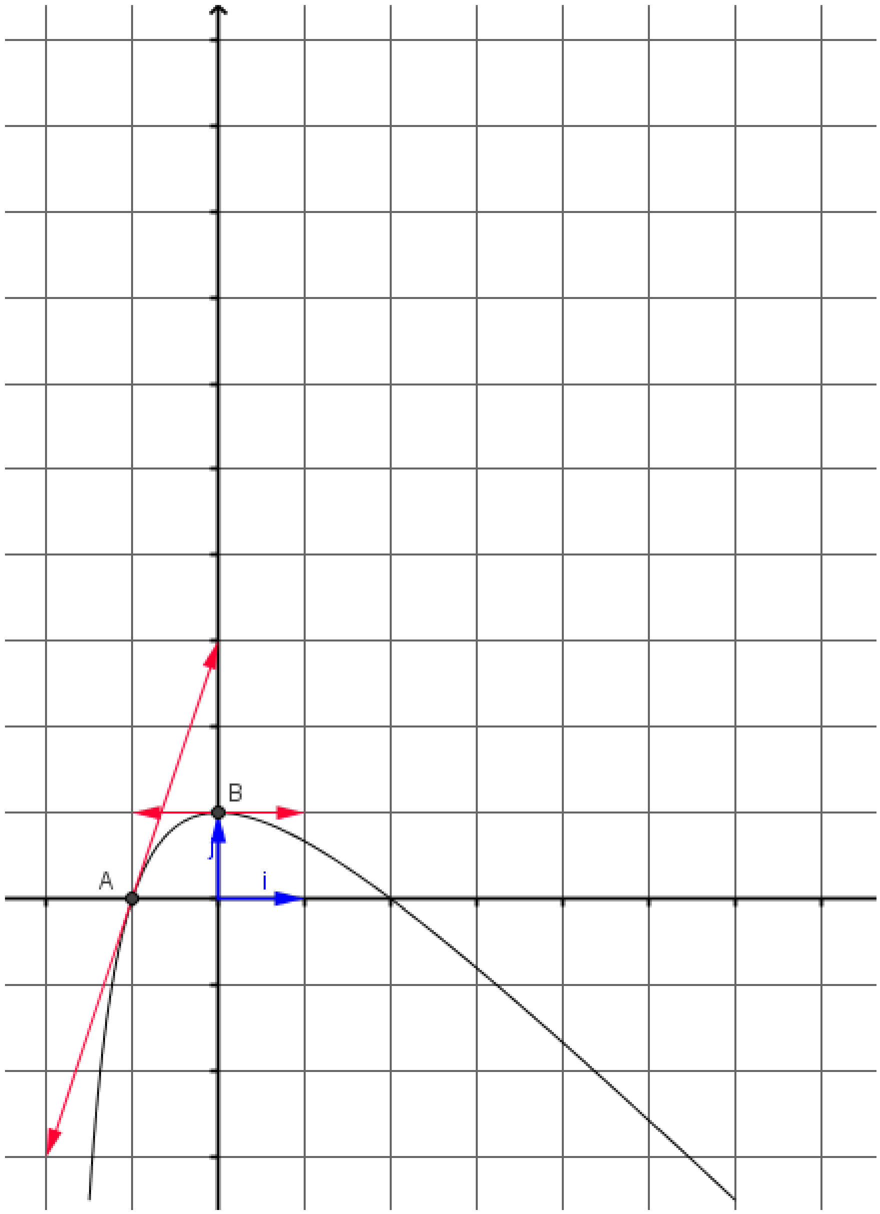
2° On définit sur] – 2 ; + ∞ [la fonction *g* par *g* (*x*) = [*f* (*x*)]^2.

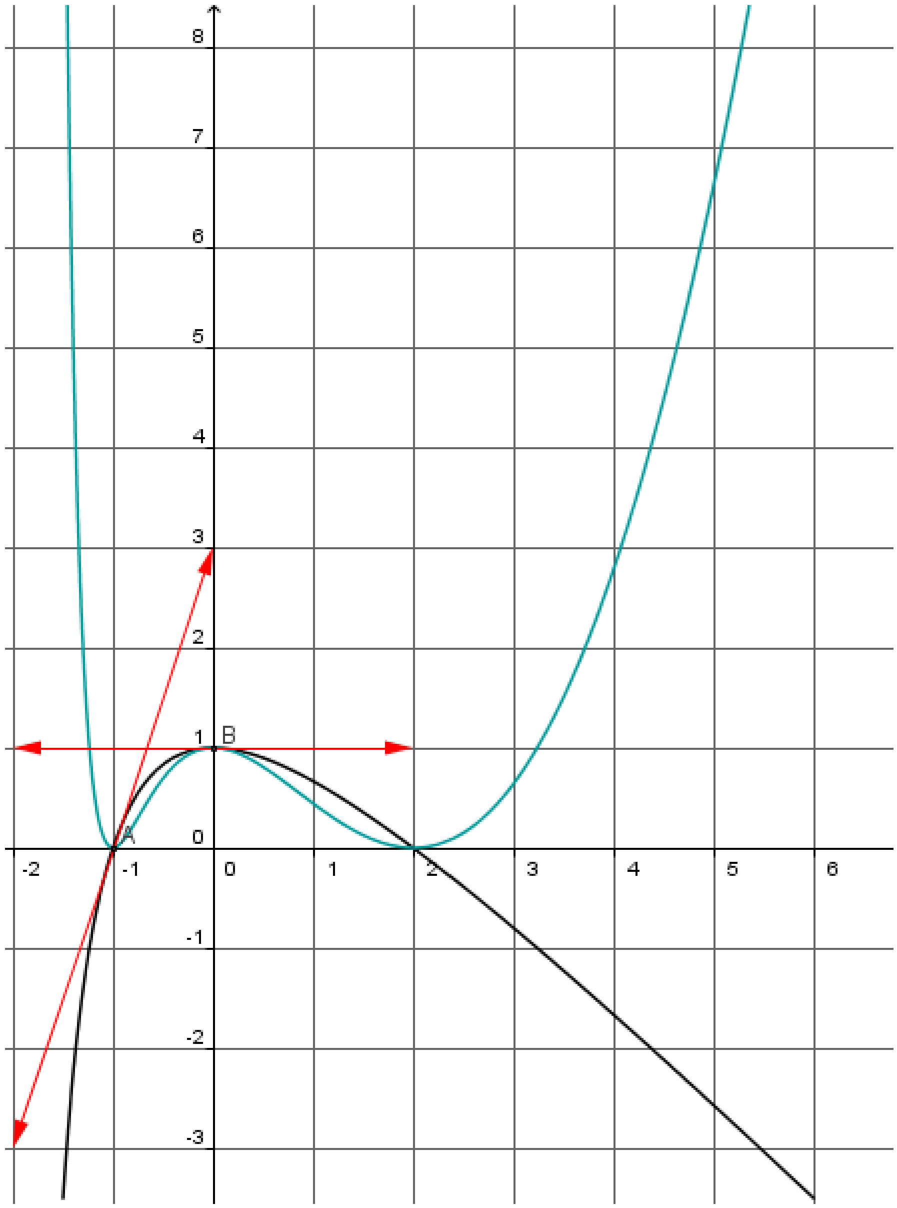
a) Calculer *g* (– 1) = 0, *g* (0) = 1, *g* (2) = 0, *g* (– 1,5) = *g* (6) = 12,25

b) Sachant que *g* '(*x*) = 2 *f* '(*x*) × *f* (*x*), étudier le signe de *g*'(*x*) puis dresser le tableau de variations de *g*.

x	– 1,5		– 1		0		2		6
signe de *f* '(*x*)		+		+	0	–		–	
signe de *f* (*x*)		–	0	+		+	0	–	
signe de g'(*x*)		–	0	+	0	–	0	+	
variation de *g*	12,25	↘	0	↗	1	↘	0	↗	12,25

3° Tracer sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, une courbe représentative d'une fonction satisfaisant aux résultats obtenus précédemment pour la fonction *g*.


B
A
j
i



8
7
6
5
4
3
2
1
B
0
A
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3