I DEVELOPPEMENT LIMITE D'UNE FONCTION EN 0

1° Définition

Soit f une fonction définie en 0 et au voisinage de 0.

- On dit que f admet un développement limité d'ordre n (dln) en 0 s'il existe des nombres réels $a_0, a_1 ..., a_n$ et une fonction ε tels que, au voisinage de t = 0, f (t) peut s'écrire sous la forme: $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n + t^n \varepsilon_n(t)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_n(t) = 0$.
- Le polynôme $a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ est appelé partie régulière du développement limité d'ordre n de f en 0.

Remarques • $a_0 = f(0)$. • On admet que si un tel développement limité existe, il est unique.

2° Développements limités des fonctions usuelles

On admet les développements limités (dln) des fonctions usuelles suivantes au voisinage de 0.

• $e^t = e^t = 1 + \frac{t}{1\,!} + \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^3}{3\,!} + \dots + \frac{t^n}{n\,!} + t^n \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

• $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

• $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ... + (-1) t^n + t^n \varepsilon(t)$avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

• $\sin t = t - \frac{t^3}{3\,!} + \frac{t^5}{5\,!} + ... + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)\,!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

• $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^4}{4\,!} + ... + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)\,!} + t^{2p} \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

• $(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1\,!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!} t^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Remarques • On observe que, pour la fonction impaire sinus, la partie régulière ne comporte que des puissances impaires et que, pour la fonction paire cosinus, la partie régulière ne comporte que des puissances paires.

• On va maintenant observer comment obtenir le développement limité de fonctions obtenues par diverses opérations.

II OPERATION SUR LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

1° Développement limité d'une combinaison linéaire de fonctions

Soit deux réels λ et μ et deux fonctions f et g qui admettent au voisinage de zéro des dln dont les parties régulières sont P et Q. Alors, la partie régulière du dln de la fonction $\lambda f + \mu g$ au voisinage de zéro est $\lambda P + \mu Q$.

2° Développement limité d'un produit de fonctions

Soit deux fonctions f et g qui admettent au voisinage de zéro des dln dont les parties régulières sont P et Q. Alors la partie régulière du dln au voisinage de zéro de la fonction $f \times g$ est le polynôme déduit de $P \times Q$ en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

3° Développement limité d'une fonction composée

Soit deux fonctions f et g dont les dln au voisinage de zéro sont $f(u) = P(u)+u^n \varepsilon_1(u)$ et $g(x) = Q(x)+x^n \varepsilon_2(x)$, la fonction g étant telle que g(0) = 0 . Alors la partie régulière du clin au voisinage de zéro de (f og)(x) est obtenue

- en écrivant le dln au voisinage de zéro de f(u) ;
- en posant u = g(x) ;
- en remplaçant, dans P(u), chaque u^k par la partie régulière de son dln au voisinage de zéro, pour tout entier k inférieur ou égal à n ;
- en complétant par « $+ x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ ».

4° Intégration d'un développement limité

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 et soit F une primitive de f sur un intervalle I contenant 0. On obtient la partie régulière du développement limité d'ordre n + 1 de F en «intégrant terme à terme » la partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 de f et en ajoutant la constante F(0).

Si $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n + t^n \varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$,

alors $F(t) = F(0) + a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + ... + a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} + t^{n+1} \varepsilon_1(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$.

Dl3 de arctan. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ admet pour primitive la fonction arctangente.

Le dl3 de f au voisinage de zéro est : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^3 \varepsilon(x)$

Le dl4 de la fonction arc tangente au voisinage de zéro est: $\text{Arctan } x = \text{Arctan }(0) + x - \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon(x)$,

On obtient : $\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon(x)$,