1 Exemple d'étude locale d'une fonction en zéro

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

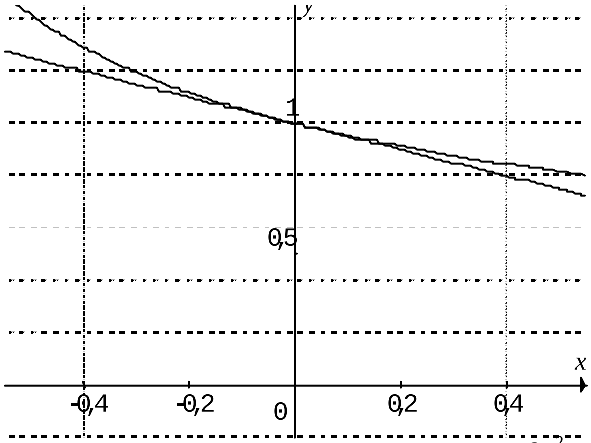
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour $a=-\dfrac{1}{2}$ et n = 2 , la formule du dln de $(1+t)^{\alpha}$ donne

$f(t)=1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{3t^2}{8}+t^2\,\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$ $(\alpha -=-\dfrac{1}{2})$

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en zéro est donc :

$y=1-\dfrac{t}{2}$. La position relative de cette tangente et de la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par le signe au voisinage de zéro de l'expression : $D(t)=\dfrac{3t^2}{8}+t^2\,\varepsilon(t)$. On admet qu'au voisinage de zéro D(t) a le même signe que $\dfrac{3t^2}{8}$ ce qui s'explique intuitivement par le fait que $t^2\,\varepsilon(t)$ est négligeable devant $\dfrac{3t^2}{8}$.

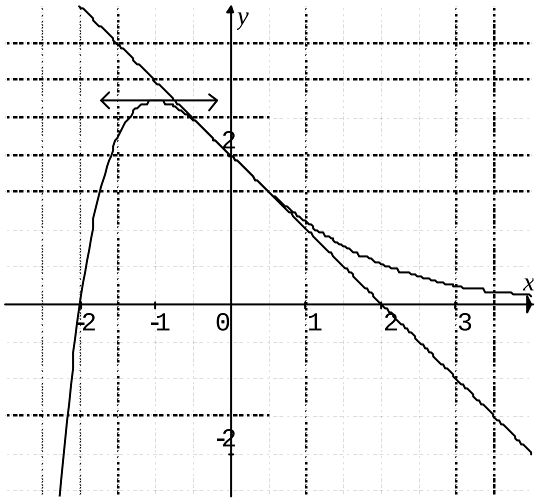


On vérifie graphiquement qu' au voisinage de zéro, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$.

2 Développement limité et intégration par parties

Le plan est muni du repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, où l'unité est 1 centimètre.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$.
La courbe $\mathcal{C}$, de la figure est la courbe représentative de f.
La droite $\mathcal{T}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
1°a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est : $f(x)=2-x+\dfrac{1}{6}x^3+x^3\,\varepsilon(x)$

b) En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à lu courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.



2° Utiliser la figure pour justifier, à l'aide d'une phrase, l'encadrement $2\le\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt\le 3$

3° a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=3-\dfrac{5}{e^2}$

b) En déduire une valeur approchée en cm^2 arrondie à 10^{-2}, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, les axes de coordonnées et la droite d'équation x = 2. Vérifier l'encadrement donnée au 2°.

3 On détermine un développement limité pour obtenir une valeur approchée d'une intégrale dont on ne sait pas calculer la valeur exacte. Soit f la fonction définie sur $]-1,\,1]$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$

1° Démontrer que le développement limité d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0 est
$f(x)=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+x^2\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

2° a) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ par $g(x)=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2$. On note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de g et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Observer sur l'écran d'une calculatrice graphique que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ coïncident presque sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{1/2} g(x)\,dx$. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.
Le résultat obtenu est une bonne approximation de l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ dont les logiciels de calcul formel ne donnent pas de valeur exacte.

4 Approximation d'une intégrale Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\dfrac{1}{2}\right]$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$
On ne sait pas calculer une primitive de f.
1° Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est
$f(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

2° On admet que l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^{1/2}\left(1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right)dx$ est une bonne approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$
Montrer alors que $I\approx 0{,}516$.

$\boxed{5}$ Courbe et parabole

On considère la fonction h définie sur] – 1, +3] par : $h(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(l + x)$

et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique: 2 cm). 1° a) Déterminer la limite de h en – 1.
b) Etudier les variations de h.
2° Calculer le développement limité de h à l'ordre 3 du voisinage de zéro. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapt port à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ au voisinage de l'origine.

3° Construire les arcs de la parabole $\mathcal{P}$ et de la courbe $\mathcal{C}$ dans le même repère, pour x variant dans] – 1, 3].

$\boxed{6}$ Courbe et parabole

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=(- x+ 1)\, e^x + x^2 - 1$.
1° Etudier le sens de variation de f et établir le tableau de variation en précisant les valeurs exactes aux extremums.
2° a) En utilisant le développement limité en zéro à l'ordre 3 de e^x , écrire le développement limité en zéro à l'ordre 3 de f(x).
b) Etudier la position, au voisinage de l'origine, de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f par rapport à la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = \frac{x^2}{2}$

3° On munit le plan d'un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité graphique 10 cm.,
a) Tracer les arcs de courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre – 1 et + 1.
On précisera les tangentes aux points d'abscisses 1 et – 1.
b) Calculer l'aire en centimètres du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln 2. On demande la valeur ; exacte en cm^2. (On pourra utiliser une intégration par parties).

$\boxed{7}$ Asymptote

Soit f la fonction définie sur I =] 0, + ∞ [par $f(x) = e^{-1/x}(x + 1)$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.
1° Etudier les variations de f sur I et préciser les limites de f aux bornes de cet intervalle.
2° Donner le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $h : t \longmapsto e^{-t}(1 + t)$.
En déduire, en posant $t = \frac{1}{x}$, que la courbe $\mathcal{C}$ admet, quand x tend vers + ∞ une asymptote que l'on construira. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
3° Construire $\mathcal{C}$

$\boxed{8}$ Asymptote

Soit la fonction f définie sur l'intervalle] 0, +∞ [par : $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{1/x}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de cette fonction f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; unité graphique : 1 cm.
1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2° a) Donner le développement limité d'ordre deux, au voisinage de zéro, de la fonction : $t \longmapsto e^t$.
b) En posant t = x, en déduire que f (x) peut s'écrire, au voisinage de + ∞ , sous la forme : $f(x) = a x + b + \varphi(x)$,
où a et b sont des réels que l'on précisera et φ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.
En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on précisera une équation.
3° a) Calculer f '(x) pour x > 0. Montrer que f '(x) est du signe de $(x^2 - x - 2)$.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
(On donnera une valeur approchée du minimum de f arrondie à 10^{-1}).
4° Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans le repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$\boxed{2}$ Produit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} - \cos 3x$.

1° Sachant que les développements limités au voisinage de 0 de e^t et de cos t sont : $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t$.

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p!)} + {}^{2p} \varepsilon_1(t))$

Avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$ et avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$

a) Donner les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x \longmapsto e^{-x}$ et $x \longmapsto \cos 3x$;

b) En déduire qu'au voisinage de 0 le développement limité d'ordre 2 de f (x) est $1 - x - 4x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(t) = 0$

2° La courbe représentative C de la fonction f sur [– π/3 ; π/3] est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe". au point d'abscisse 0.

b) Construire T sur le graphique, après l'avoir reproduit, et justifier à l'aide du développement limité du A. 1° b) ci-dessus la position relative de T et de C au voisinage de 0.

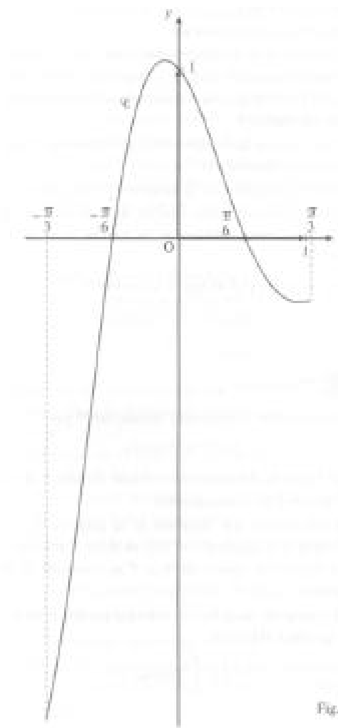


Fig. 87

Somme i,

i

On considère la fonction f définie sur]- t, +~[par:

f(x)=x0,5 +ln(x+ 1).

On nomme T sa représentation graphique dans un repère orthonormal (O ; i , j) : unité graphique 2 cm. 1° Déterminer les limites de f en -1 et en +x. Lorsque x tend vers - 1, on pourra poser t = x + 1 et utiliser lim t In t = 0. 1 _ o 2° Étudier les variations de la fonction f. 3° Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction ,J au voisinage de 0 et en déduire: - une équation de la tangente 2'à 'P au point d'abscisse 0, - la position de `(, par rapport à tau voisinage de 0. 4° Tracer `f et Tdans le repère (O ; i , j). 5° a) Montrer que la fonction G définie par:

G(x)=(x +1) In (x+1)-x est une primitive, sur l'intervalle]- 1, +x[, de la fonction g définie par g(x) = In (x + 1). b) En déduire l'aire, exprimée en em', de la région du plan limitée par la courbe `6, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2. On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au mm'-.

168 *** On compare deux valeurs approchées

Soit ,f la fonction définie sur fR par f(x) = (x + 2) e x.

1° Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de

3

f au voisinage de 0 est f(x) = 2-x + + x3x P_

(x) avec

lim s(x) = 0.

~~o ! l

f 2" Soit Pinté<,,rale 1 = f2

~2-x + XI

IdX.

/u