$\boxed{1}$ Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$

Démontrer que le développement limité d'ordre 2 de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ est :

$g(x) = 1 - x + \dfrac{3x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$.

En déduire que le développement limité d'ordre 2 de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$ est :

$h(x) = 1 - 2x + 3x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$.

$\boxed{2}$ Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \longmapsto \ln(1 - x)$.

En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \longmapsto (x^2 + x + 1)\ln(1 - x)$ est :

$f(x) = - x - \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{11x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$.

$\boxed{3}$ Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f: x \longmapsto (x + 1)\cos x$. est :

$f(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$.

$\boxed{1}$ $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\ \varepsilon(x)$

$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha\,(\alpha - 1)}{2} x^2 + x^2\ \varepsilon(x)$

$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + x^2\ \varepsilon(x)$

donc : $\frac{1}{\sqrt{1 + 2x}} = 1 - x + \frac{3}{2} x^2 + x^2\ \varepsilon(x)$

h(x) : $\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - x + \frac{3}{2} x^2\ \right)$

$h(x) = 1 - x + \frac{3}{2} x^2 - x + x^2 + \frac{x^2}{2} + x^2\ \varepsilon(x) = 1 - 2\,x + 3\,x^2 + x^2\ \varepsilon(x)$

$\boxed{2}$ $\ln\,(1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\ \varepsilon(x)$

f(x) : $(x^2 + x + 1)\left(- x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$

$f(x) = - x^3 - x^2 - \frac{x^3}{2} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\ \varepsilon(x)$

$= - x - \frac{3\,x^2}{2} - \frac{11\,x^3}{6} + x^3\ \varepsilon(x)$

$\boxed{3}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\ \varepsilon(x)$

f(x) : $(1 + x)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} + x^3\ \varepsilon(x)$

$= 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3\ \varepsilon(x)$