$\boxed{1}$ Résoudre une équation différentielle du premier ordre de la forme $a(t)\, x'(t) + b(t)\, x(t) = 0$ où a et b ne sont pas des fonctions constantes

Les questions 1° et 2° .sont indépendantes.

1° On considère l'équation différentielle (E) $t\, x'(t) - 2\, x(t) = 0$ dans laquelle x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $]\, 0, +\infty\, [$ et x' sa fonction dérivée.

a) Déterminer une primitive sur $]\, 0, +\infty\, [$ de la fonction f définie sur $]\, 0, +\infty\, [$ par $f(t) = -\dfrac{2}{t}$

b) Montrer que, pour tout t de $]\, 0, +\infty\, [$ $e^{2\ln t} = t^2$

c) Résoudre l'équation différentielle (E).

d) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $x(1) = 1$.

2° On considère l'équation différentielle (E) $x\, y' + (x - 2)\, y = 0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]\, 0, +\infty\, [$, y' sa fonction dérivée.

a) Vérifier que, pour tout x de $]\, 0, +\infty\, [$, $\dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$. En déduire une primitive sur$]\, 0, +\infty\, [$ de la fonction définie sur $]\, 0, +\infty\, [$ par $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$.

b) Montrer que, pour tout x de $]\, 0, +\infty\, [$. $e^{-x + 2\ln x} = x^2\, e^{-x}$.

c) Utiliser le a) et le b) pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

$\boxed{2}$ Les parties A et B sont indépendantes.

A. Résolution d'une équation différentielle On considère l'équation différentielle (E) : $x\, y' - 2\, y = -x^2$ où y est une fonction de la variable x dérivable sur l'intervalle $]\, 0, +\infty\, [$ et où y', désigne la dérivée de y.

1° Résoudre sur $]\, 0, +\infty\, [$ l'équation différentielle (E_0) : $x\, y' - 2\, y = 0$.

2° Vérifier que la fonction h définie sur $]\, 0, +\infty\, [$ par $h(x) = -x^2 \ln x$, est une solution de (E).

3° Déduire du 1° et 2° l'ensemble des solutions de (E).

4° Déterminer la solution f de (E) sur $]\, 0, +\infty\, [$ vérifiant la condition $f(e) = 0$.

B. Etude d'une fonction. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\, 0, +\infty\, [$ par $f(x) = x^2\, (1 - \ln x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ (unité graphique : 6 cm).

1° a) Montrer que, pour tout x de $]\, 0, +\infty\, [$, $f'(x) = x\, (1 - 2\ln x)$.

b) Etudier le signe de $1 - 2\ln x$. c) En déduire le sens de variation de f.

2° Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

3° a) Dresser le tableau de variation de f. b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ en précisant les tangentes aux points O, A et B de cette courbe, d'abscisses respectives 0, $\sqrt{e}$ et e.

C. Calcul d'une aire On se propose, dans cette partie, de calculer l'aire de la partie du plan constituée des points $M(x, y)$ tels que $\alpha \le x \le e$ et $0 \le y \le f(x)$, où α est un nombre réel positif ou nul donné, inférieur à e.

1° Soit F la fonction définie sur $]\, 0, +\infty\, [$ par : $F(x) = \dfrac{4}{9} x^3 - \dfrac{1}{3} x^3 \ln x$.

Vérifier que F est une primitive de f sur $]\, 0, +\infty\, [$.

2° a) On suppose $\alpha > 0$. Exprimer l'aire cherchée en cm^2 en fonction de α. On note le résultat $A(\alpha)$.

b) Calculer la limite de .$A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

On rappelle que, pour tout nombre entier positif n, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$.

$\boxed{3}$ Une méthode d'obtention d'une solution particulière

Soit, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y' + 7y = e^{2x}$.
1° Intégrer l'équation homogène associée.
2° Montrer qu'il existe une solution particulière de l'équation différentielle, du type : $f(x) = k(x)\ e^{-7x}$, où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à déterminer.
3° Déduire de ce qui. précède l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.
4° Indiquer la fonction f telle que : $\begin{cases} f'(x) + 7f(x) = e^{2x} \\ f(0) = 3. \end{cases}$

$\boxed{4}$ 1° Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y' + y = 1 - e^{-x}$
a) Vérifier que la fonction f définie sur R par $f(x) = 1 - x\,e^{-x}$ est solution de (E).
b) Donner la solution générale de (E). c) Déterminer la solution particulière g de (E) telle que $g(0) = 0$.
2° Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 2]$ par: $g(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
a) Etudier les variations de g. b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$. c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} (x + 1)\, e^{-x}\, dx$. d) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en centimètres carrés, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$. Donner l'arrondi à 2 décimales de $\mathcal{A}$.

$\boxed{5}$ 1° On considère l'équation différentielle : $(1 + x)\, y' - 2y = \ln(1 + x)$ $(x \in\ ]-1 ; +\infty[)$.(E)
a) Résoudre l'équation différentielle $(1 + x)\, y' - 2y = 0$. b) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{1 + 2\ln(1 + x)}{4}$ est solution de (E). c) Donner la solution générale de (E).
d) Déterminer la fonction h, solution de (E) et vérifiant la condition $h(0) = 0$.
2° Soit la fonction h définie sur $]-1 ; 3[$ par : $h(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x)$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal d'unité graphique l cm.
a) Déterminer la limite de h en -1. b) Etudier les variations de h. c) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de h. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ au voisinage de l'origine du repère. d) Construire les arcs de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$ dans le même repère pour $-1 < x < 3$.

$\boxed{5}$ Dans tout le problème, $x \in\ ]-1 ; 1]$.
1° Primitive et équation différentielle
a) Soit $h(x) = \dfrac{2x + 1}{2(x + 1)}$ Décomposer h(x) en éléments simples et en déduire une primitive H de h.
b) On considère l'équation différentielle (E) : $2(x + 1)\, y' = (2x + 1)\, y$ (E)
où y est une fonction de x définie sur $]-1 ; 1]$. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
2° Fonction et développement limité
Soit $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x + 1}}$, $g(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x$, $\mathcal{l}(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2$.
Soit $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$, leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 5 cm. a) Calculer f(1), et $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$. b) Etudier les variations de f. c) Déterminer le dl3 de f au voisinage de 0. d) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ ont même tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0. e) Tracer $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$ et l'asymptote de $\mathcal{C}$ (on placera les points d'abscisses – 0,9 ; – 0,5 ; 0 ; 0,5 ; et les 5 points d'arrêt, après avoir précisé leurs ordonnées.
3° Aire Soit $I = \int_0^{1/2} f(x)\, dx$, $J = \int_0^{1/2} g(x)\, dx$, $K = \int_0^{1/2} \mathcal{l}(x)\, dx$.
a) Interpréter graphiquement I, J et K. b) Ne connaissant pas de primitive s'écrivant sans le symbole « $\int$ » de f, on ne peut obtenir la valeur exacte de I. Nommer celui des deux nombres J et K qui approche le mieux I, après les avoir calculés à l'aide de primitives à présenter.
c) Calculer L, valeur approchée de I issue du dl3 de f, après avoir présenté les travaux nécessaires.

$\boxed{7}$ A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $(x + 1)\, y' + x\, y = e^{-x}$ où l'inconnue y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$, et où y' est la fonction dérivée de y.

1° Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par : $g(x) = \dfrac{-x}{x+1}$ Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout x de I, $g(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$

2°En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle I.

3° Résoudre, sur l'intervalle I, l'équation différentielle (E'):$(x + l)\, y' + x\, y = 0$.

4° Vérifier que la fonction φ définie, sur ℝ, par $\varphi(x) = -e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (E).

5° Déduire des questions précédentes toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6° Parmi ces solutions, déterminer la fonction f qui vérifie: $f(0) = -2$.

B. Eléments d'étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = (-x-2)\, e^{-x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère donné.

1° Montrer que la fonction f est croissante sur I.

2° A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante : $\int_0^2 (-x-2)\, e^{-x}\, dx$

3° a) Ecrire le développement limité d'ordre 3, au voisinage de zéro, de la fonction: $x \longmapsto e^{-x}$ puis le développement limité d'ordre 3, au voisinage de zéro, de la fonction f.

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C , au point d'abscisse 0, et la positive relative de C et T au voisinage de ce point.

$\boxed{1}$ a) $F(t) = -2 \ln t$ b) $e^{2 \ln t} = (e^{\ln t})^2 = t^2$ c) $\dfrac{b(t)}{a(t)} = -\dfrac{2}{t}$ Solutions : $k\, e^{-2 \ln t} = k\, t^2$ d) $x(t) = k\, t^2$; $x(1) = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

2° a) $1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$ $G(x) = x - 2 \ln x$. b) $e^{-x + 2 \ln x} = e^{-x} \times e^{2 \ln x} = k^{-x} \times (e^{\ln x})^2 = x^2 e^{-x}$.

c) $\dfrac{b(t)}{a(t)} = \dfrac{x-2}{x}$ Primitive :$G(x) = x - 2 \ln x$. Solutions : $k\, e^{-x + 2 \ln x} = k\, x^2 e^{-x}$

$\boxed{2}$ A 1° $\dfrac{b(x)}{a(x)} = -\dfrac{2}{x}$ Primitive : $-2 \ln x$ Solutions : $k\, e^{2 \ln x} = k\, x^2$ 2° $h(x) = -x^2 \ln x$; $h'(x) = -2x \ln x - x^2 \times \dfrac{1}{x}$

$h'(x) - 2h(x) = x(-2x \ln x - x) - 2(-x^2 \ln x) = -2x^2 \ln x - x^2 + x^2 \ln x = -x^2$. 3° $f(x) = -x^2 \ln x + k\, x^2$.

4° $f(e) = 0 \Leftrightarrow -e^2 + k\, e^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$. B 1° $f'(x) = 2x(1 - \ln x) - \dfrac{1}{x} \times x^2 = x - 2x \ln x$. b) $x(1 - 2 \ln x) \geq 0 \Leftrightarrow$ $1 - 2 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$. c) f est croissante sur $]-\infty , \sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e} ; +\infty[$ 2° $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ b) tangente en O . $y = 0$ tangente en A $y = \dfrac{e}{2}$ Tangente en B : $y = -e(x - e)$

C $F'(x) = \dfrac{4}{9} \times 3x^2 - \dfrac{1}{3} \times 3x^2 \ln x - \dfrac{1}{3} x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2 - x^2 \ln x = f(x)$ 2° a) $A(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)\, dx = [F(x)]_\alpha^e =$ $\dfrac{\alpha^3 \ln \alpha}{3} - \dfrac{4\alpha^3}{9} + \dfrac{e^3}{9}$ b) $\lim\limits_{x \to \alpha} A(\alpha) = \dfrac{e^3}{9}$

$\boxed{3}$ 1° $k\, e^{-7x}$ 2° $f(x) = k(x)\, e^{-7x}$; $f'(x) = k'(x)\, e^{-7x} - 7k(x)\, e^{-7x}$. $f'(x) + 7f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow k'(x)\, e^{-7x} = e^{2x} \Leftrightarrow$ $k'(x) = e^{9x}$ $k(x) = \dfrac{e^{9x}}{9}$ $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{9}$. 3° Solutions : $\dfrac{e^{2x}}{9} + k\, e^{-7x}$ 4° $f(0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} + k = 3 \Leftrightarrow k = \dfrac{26}{9}$ $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 26\, e^{-7x}}{9}$

$\boxed{4}$ 1° $f(x) = 1 - x\, e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x} + x\, e^{-x}$. $f'(x) + f(x) = -e^{-x} + x\, e^{-x} + 1 - x\, e^{-x} = 1 - e^{-x}$.
b) $g(x) = 1 - x\, e^{-x} + k\, e^{-x}$ c) $g(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1$. $g(x) = 1 - x\, e^{-x} - e^{-x} = 1 - (x+1)\, e^{-x}$.
2° a) $g'(x) = -e^{-x} + (x+1)\, e^{-x} = x\, e^{-x}$. $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. c) $I = 3 - e + 4e^{-2}$ d) $4I \approx 3{,}29$

$\boxed{5}$ 1° $\dfrac{b(x)}{a(x)} = -\dfrac{2}{1+x}$ Primitive : $-2 \ln(1+x)$ Solutions : $k\, e^{2 \ln(1+x)} = k(1+x)^2$. b) $g(x) = -\dfrac{1 + 2 \ln(1+x)}{4}$
$g'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x)}$. $(1+x)\, g'(x) - 2g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1 + 2 \ln(1+x)}{2} = \ln(1+x)$. c) $-\dfrac{1 + 2 \ln(1+x)}{4} + k\,(1+x)^2$
d) $h(0) = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{4}$ 2° a) $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = +\infty$ b) $h'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{2(x+1)} = \dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$. $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. h croissante sur $]-1 ; 0]$ et h décroissante sur $[0 ; +\infty[$. c) $h(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$. Sur $]-1 ; 0]$ C est au dessus de la tangente et sur $[0 ; +\infty[$ C est au dessous.

$\boxed{6}$ 1° $h(x) = 1 - \dfrac{1}{2(x+1)}$. $F(x) = x - \mathbf{\dfrac{1}{2}} \ln(x+1)$. b) Solutions : $f(x) = k\, e^{x - 1/2 \ln(1+x)} = k\, e^x \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{-1/2}$
$f(x) = k\, e^x (x+1)^{-1/2}$. $f(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ 2° a) $f(1) = \dfrac{e}{\sqrt{2}}$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$
c) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8} x^2 - \dfrac{x^3}{48} + x^3 \varepsilon(x)$ d) $f(0) = h(0) = l(0) = 1$ et $f'(0) = h'(0) = l'(0) = \dfrac{1}{2}$. $f'(x) = \dfrac{(2x+1)\, e^x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$

3° La meilleur valeur approchée de I est K. Primitive de l. $L(x) = x + x^2 + \dfrac{1}{8} x^3$ $K = \dfrac{37}{64} \approx 0{,}58$.

Rm la calculatrice donne : $I \approx 0{,}5783$ et $K \approx 0{,}5781$

$\boxed{7}$ non corrigé