

non corrigé

8 Soit (E) l'équation différentielle: $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$ où y est une fonction de la variable x , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle: $(E_0) y'' + 2y' + y = 0$.

2° Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 e^{-x}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).

3° En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de (E).

4° Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

9 Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$.

2° Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E).

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

[1] a) Equation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0$. $\Delta = 1$. -1 et -2 sont les racines. $\lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$

b) Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$. $\Delta = 0$. 2 est racine double $(\lambda x + \mu) e^{2x}$

c) Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 13 = 0$. $\Delta = -9$. $2 + 3i$ et $2 - 3i$ sont les racines complexes $e^{2x} (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$

[2] 1° l'Equation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$. Les racines sont 1 et 2 . $\lambda e^t + \mu e^{2t}$.

2° a) $x_p = z(t) e^t$. $x_p' = z'(t) e^t + z(t) e^t$ $x_p'' = z''(t) e^t + 2z'(t) e^t$.

On a x_p solution de (E) $\Leftrightarrow x_p'' - 3x_p' + 2x_p = t e^t \Leftrightarrow z''(t) e^t + 2z'(t) e^t - 3(z'(t) e^t + z(t) e^t) + 2z(t) e^t = t e^t$
 $\Leftrightarrow z''(t) + 2z'(t) - 3z'(t) - 3z(t) + 2z(t) = t \Leftrightarrow z''(t) - z'(t) = t$.

b) $z(t) = a t^2 + b t + c$, $z'(t) = 2a t + b$ et $z''(t) = 2a$.

$z''(t) - z'(t) = t \Leftrightarrow 2a - (2a t + b) = t$. on prend a et b vérifiant : $2a - b = 0$ et $-2a = 1$ c'est-à-dire $a = -\frac{1}{2}$ et b

$= -1$. Il n'y a pas de condition sur c . on peut donc choisir $c = a$. c) $z(t) = -\frac{1}{2} t^2 - t$ et $x_p = -\frac{1}{2} t^2 e^t - t e^t$.

3° $-\frac{1}{2} t^2 e^t - t e^t + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ 4° f solution de (1) donc il faut déterminer les constantes λ et μ pour que $f(0) = 0$

(C passe par O) et $f'(0) = 0$ (la tangente en O est parallèle à l'axe des abscisses).

$f(t) = -\frac{1}{2} t^2 e^t - t e^t + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ et $f'(t) = -t e^t - \frac{1}{2} t^2 e^t - e^t - t e^t + \lambda e^t + 2\mu e^{2t}$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = 0$ et $f'(0) = 0 \Leftrightarrow -1 + \lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\mu$ et $\mu = 1$. $f(t) = -\frac{1}{2} t^2 e^t - t e^t - e^t + e^{2t}$

[3] 1° $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r+3)$. $\lambda e^x + \mu e^{-3x}$ 2° $g(x) = K$, $g'(x) = g''(x) = 0$.

g solution de (E) $\Lef$

7 1° $r^2 + 4r + 3 = (r + 1)(r + 3)$. Les solutions sont : $\lambda e^{-x} + \mu e^{-3x}$.

2° $y_1 = A e^{-2x}$; $y_1' = -2 A e^{-2x}$ et $y_1'' = 4 A e^{-2x}$. $y_1'' + 4 y_1' + 3 y_1 = e^{-2x} \Leftrightarrow 4 A e^{-2x} - 8 A e^{-2x} + 3 A e^{-2x} = e^{-2x}$
 $y_1 = -e^{-2x}$. 3° Solutions : $-e^{-2x} + \lambda e^{-x} + \mu e^{-3x}$. 4° $f(x) = -e^{-2x} + \lambda e^{-x} + \mu e^{-3x}$; $f'(x) = 2 e^{-2x} - \lambda e^{-x} - 3 \mu e^{-3x}$

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \lambda + \mu = 0 \\ 2 - \lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2} \quad f(x) = -e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}$