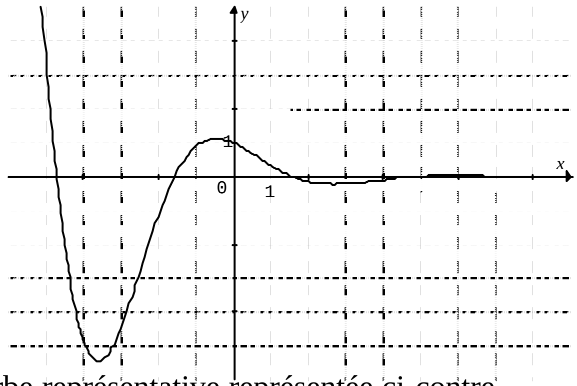
$\boxed{1}$ A. On considère l'équation différentielle (E) :

4 y'' + 4 y' + 5 y = 0 où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur ℝ, y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.
1° Résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E).
2° Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales f (0) = 1 et f ' (0) = $-\dfrac{1}{2}$



B. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$
Soit f la fonction définie sur ℝ par f (x) = $e^{-x/2}$ cos x et C sa courbe représentative représentée ci-contre.

1° Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = -\,e^{-x/2}\left(\dfrac{1}{2}\cos x + \sin x\right)$

2° a) Résoudre dans ℝ l'équation f (x) = 0.

b) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ \ \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a f (x) ≥ 0.

3° Soit l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx$. Soit la fonction F telle que, pour tout réel x, $F(x) = -\dfrac{1}{5}\,[4 f'(x) + 4 f(x)]$.

a) Sachant que f est solution de l'équation différentielle (E), montrer que F est une primitive de f.

b) Etablir que : $I = -\dfrac{4}{5}\,[\,f(\pi/2) - f(-\pi/2)\,] - \dfrac{4}{5}\,[\,f'(\pi/2) - f'(-\pi/2)\,]$ puis que $I = \dfrac{4}{5}\,(e^{\pi/4} + e^{-\pi/4})$.

$\boxed{2}$ A. Résolution d'une équation différentielle

On veut résoudre l'équation différentielle (E) y '' + 2 y' – 3 y = – 9 x + 9 où y est une fonction numérique de la variable réelle x, deux fois dérivable sur ℝ, y' la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée seconde de y.
1° Résoudre l'équation différentielle (E_0) y'' + 2 y' – 3 y = 0.
2° Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie sur ℝ par g(x) = a x + b soit une solution particulière de (E). 3° En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
4° Déterminer la solution particulière h de (E) telle que h(0) et h' (0) = 0.
B. Etude des variations et calcul d'aire Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x) = e^{3x} + 3 x – 1.
1° Déterminer la limite de f (x) quand x tend vers + ∞ , puis la limite de f (x) quand x tend vers – ∞ .
2° Montrer que, pour tout x appartenant à ℝ f '(x) = – 3 e^{-3x} + 3. Etudier le signe de f ' (x) et dresser le tableau de variation de f. En déduire le signe de f (x).
3° Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ d'unité graphique 1 cm. Tracer la courbe C . 4° Montrer que $\displaystyle\int_0^3 e^{-3x}\,dx = -\dfrac{1}{3}\,e^{-9} + \dfrac{1}{3}$.

5° En déduire, 1 aire en cm^2, de la partie du plan comprise entre C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 3.

$\boxed{3}$ A. On veut résoudre l'équation différentielle (E) : y''(x) + 2 y'(x) + y(x) = e^{-x} où y est une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
1° Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y''(x) + 2 y'(x) + y(x) = 0.
2° Déterminer une fonction u, deux fois dérivable sur ℝ, telle que la fonction y_0, définie par $y_0(x) = u(x)\,e^{-x}$, soit solution de l'équation différentielle (E). 3° Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) telle que f (0) = 1 et f '(0) = 0.

B. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur [0, 1] par : $f(x) = e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ (unité graphique: 10 cm).

1° Montrer que, pour tout nombre x appartenant à [0, 1], $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}\,e^{-x}$. Etudier le signe de f ' et dresser le tableau de variation de f. 2° a) Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.
b) Sur la figure, on constate que l'équation f (x) = 0,95 admet une solution unique. Par lecture graphique, donner une valeur approchée arrondie à 10^{-1} de cette solution (on fera apparaître sur la figure les tracés permettant cette lecture). c) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de cette solution.

$\boxed{4}$ Non corrigé

Le plan est muni du repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) où les unités graphiques sont : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axes des ordonnées.

Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle du second ordre : (E):$y'' - y' - 6y = -5e^{-2x}$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' - y' - 6y = 0$.

2° Déterminer une constante réelle A, telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = A\,x\,e^{2x}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4° Déterminer la solution particulière de l'équation (E) prenant la valeur 1 pour x = 0 et la valeur 0 pour x = – 1.

B. Etude des variations, recherche d'un développement limité

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (x + 1)\,e^{-2x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1° Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ en les justifiant. Rassembler les résultats de l'étude dans un tableau de variation.

2° a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0. j

b) En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de ce point.

3° Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.

$\boxed{1}$ A 1° c) Equation caractéristique : $4r^2 + 4r + 5 = 0$. $\Delta = -64$.. $-1 + i$ et $-1 - i$ sont les racines complexes

$e^{-x/2}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ 2° $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2}(\lambda \cos x + \mu \sin x) + e^{-x/2}(-\lambda \sin x + \mu \cos x)$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ et $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} + \mu = -\frac{1}{2}$. On a donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.

B 1° $f(x) = \cos x\, e^{-x/2}$ $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x + e^{-x/2}(-\sin x) = -e^{-x/2}\left(\frac{\cos x}{2} + \sin x\right)$

2° $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x\, e^{-x/2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos x \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$

3° a) $F'(x) = -\frac{1}{5}[4f''(x) + 4f'(x)]$. on sait que f est solution de (E) donc : $4f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 0$ On a donc : $4f''(x) + 4f'(x) = -5f(x)$ et $F'(x) = -\frac{1}{5}\times(-5f(x)) = f(x)$. F est bien une primitive de f.

$I = -\frac{1}{5}[4f'(\pi/2) + 4f(\pi/2)] + \frac{1}{5}[4f'(-\pi/2) + 4f(-\pi/2)] = \frac{4}{5}(f(\pi/2) - f(-\pi/2)) - \frac{4}{5}(f'(\pi/2) - f'(-\pi/2))$

$f(\pi/2) = f(-\pi/2) = 0$ et $f'(\pi/2) = -e^{-\pi/4}\left(\frac{\cos \pi/2}{2} + \sin \pi/2\right) = -e^{-\pi/4}$

$f'(-\pi/2) = -e^{\pi/4}\left(\frac{\cos(-\pi/2)}{2} + \sin(-\pi/2)\right) = e^{\pi/4}$ et donc : $I = \frac{4}{5}(e^{\pi/4} + e^{-\pi/4})$

$\boxed{2}$ A $r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3)$ Solutions : $\lambda e^x + \mu e^{-3x}$. 2° $g(x) = ax + b$, $g'(x) = a$ $g''(x) = 0$.

$2a - 3(ax + b) = -9x + 9 \Leftrightarrow -3ax - 3b + 2a = -9x + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -9 \\ -3b + 2a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$ et $b = -1$ $g(x) = 3x - 1$

3° Solutions : $3x - 1 + \lambda e^x + \mu e^{-3x}$ 4° $h(x) = 3x - 1 + \lambda e^x + \mu e^{-3x}$; $h'(x) = 3 + \lambda e^x - 3\mu e^{-3x}$;

$h(0) =$ et $h'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \lambda + \mu = 0 \\ 3 + \lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\mu = 1$. $h(x) = 3x - 1 + e^{-3x}$.

B 1° $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} +\infty$ 2° $f'(x) = -3e^{-3x} + 3 = 3(1 - e^{-3x})$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-3x} \Leftrightarrow 0 \geq -3x \Leftrightarrow x \geq 0$.

$f \geq 0$ 4° $\int_0^3 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^3 = -\frac{e^{-9}}{3} + \frac{1}{3}$ 5° $A \approx 0{,}33$ cm²

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f '		–	0	+	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$\boxed{3}$ A 1° $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$. Solutions : $(\lambda + \mu x)e^{-x}$.

2° $y_0(x) = u(x)e^{-x}$; $y_0'(x) = (u'(x) - u(x))e^{-x}$; $y_0''(x) = (u''(x) - 2u'(x) + u(x))e^{-x}$

$y_0''(x) + 2y_0'(x) + y_0(x) = e^{-x} \Leftrightarrow u''(x) - 2u'(x) + u(x) + 2u'(x) - 2u(x) + u(x) = 1 \Leftrightarrow u''(x) = 1$. une solution possible est $y_0(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{2}$ 3° Solutions : $\frac{x^2 e^{-x}}{2} + (\lambda + \mu x)e^{-x}$.

4° $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{2} + (\lambda + \mu x)e^{-x}$; $f'(x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} + (\mu - (\lambda + \mu x))e^{-x}$:

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ et $\mu - \lambda = 0$: $f(x) =$: $\frac{x^2 e^{-x}}{2} + e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

B 1° $f'(x) = e^{-x}(x+1) - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2}e^{-x} \leq 0$. F décroissante. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} +\infty$

2° c) $x \approx 0.82$