EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE :

I INTRODUCTION.GENERALITE.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Elle se présente sous la forme d'une relation entre la fonction inconnue et ses dérivées. Par exemple, chercher les fonctions f de la variable t dont la dérivée seconde sur $\mathbb{R}$ est 4 t, c'est résoudre l'équation différentielle

$$f''(t) = 4t \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas particulier, toutes les fonctions solutions sont obtenues en calculant des primitives

$f'(t) = 2t^2 + k_1$ où k_1 est une constante réelle quelconque ;

$f(t) = \frac{2}{3}t^3 + k_1 t + k_2$ où k_2 est une constante réelle quelconque.

On obtient une infinité de fonctions solutions, puisque k_1 et k_2 peuvent prendre toute valeur au choix.

$f(t) = \frac{2}{3}t^3 + k_1 t + k_2$ est appelé solution générale de l'équation différentielle.

Lorsque l'on donne une valeur à k_1 et à k_2, on obtient une solution particulière de l'équation différentielle. Ainsi, pour $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$, on obtient la solution particulière : $f(t) = \frac{2}{3}t^3 + t$.

II EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU PREMIER ORDRE.

1° Définition Equation Différentielle linéaire du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ une équation de la forme :

$$a(t)\,x' + b(t)\,x = u(t)$$

où a et b sont des fonctions de la variable t dérivables sur I, avec $a(t) \neq 0$ pour tout élément t de I, et où u est une fonction définie sur I.

Dans cette équation, l'inconnue, notée ici x, est une fonction dérivable sur I : $t \longmapsto x(t)$ et x' désigne sa fonction dérivée sur I.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables sur I qui en sont solutions.

Remarques

Si l'on utilise la notation différentielle de la dérivée, l'équation différentielle $a(t)\,x' + b(t)\,x = u(t)$ s'écrit :

$a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = u(t)$.

Dans certains problèmes, les notations sont autres. Par exemple, lorsque la variable est notée x et la fonction inconnue y, l'équation différentielle s'écrit

$a(x)\,y' + b(x)\,y = u(x)$ ou $a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = u(x)$.

2° équation homogène associée

L'équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$ est appelée équation homogène associée à $a(t)\,x' + b(t)\,x = u(t)$.

3° Résolution de l'équation homogène $a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$ (E')

$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0 \Leftrightarrow x' + \frac{b(t)}{a(t)}x = 0$ car $a(t) \neq 0$

a) Cas particulier : les coefficients a(t) et b(t) sont constants

On pose $\alpha = \frac{b(t)}{a(t)}$

Alors (E') équivaut à $x' + \alpha x = 0$ où α est le quotient des coefficients constants b(t) et a(t).

Dans le cas où α est une constante réelle quelconque, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto e^{-\alpha t}$ est une solution de l'équation différentielle $x' + \alpha x = 0$.

Démonstration

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\alpha t}$. On a : $f'(x) = -\alpha e^{-\alpha t}$ et $f'(x) + \alpha f(x) = -\alpha e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\alpha t} = 0$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x' + \alpha x = 0$, où α est un nombre réel fixé, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto C e^{\alpha t}$ où C est une constante réelle quelconque.

b) cas général

Pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $x' + \frac{b(t)}{a(t)} x = 0$

on reprend l'idée fondamentale, exploitée dans le cas particulier précédent, consistant à introduire une fonction exponentielle $t \longmapsto e^{u(t)}$ où u est une fonction dérivable sur I.

La fonction $x : t \longmapsto e^{u(t)}$ a pour fonction dérivée $x' : t \longmapsto u'(t)\, e^{u(t)}$.

$x : t - e^{u(t)}$ est solution de l'équation différentielle (E') si et seulement si, pour tout t de I, $u'(t)\, e^{u(t)} + \frac{b(t)}{a(t)} e^{u(t)} = 0$

c'est-à-dire $u'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} = 0$,

On en déduit qu'une fonction $t \longmapsto e^{u(t)} = 0$, où u est une fonction dérivable sur I, est solution de (E') si, et seulement si, u est une primitive sur I de $t \longmapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

Soit F une primitive de $t \longmapsto \frac{b(t)}{a(t)}$ sur I ; F existe car les fonctions a et b sont dérivables sur I et a ne s'annule pas sur I. $t \longmapsto C\, e^{F(t)}$ est une solution particulière de (E') d'après ce qui précède.

Théorème

a et b étant des fonctions données, dérivables sur un intervalle I avec a ne s'annulant pas sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E') : $a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par $t \longmapsto K\, e^{-F(t)}$, où K est une constante réelle quelconque et où F est une primitive de la fonction $\frac{b(t)}{a(t)}$

Exemple

(E1) $(t + 1)\, x' + (t - 1)\, x = 0$, avec $I =]-1,+\infty[$

$\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}$. Une primitive G est définie par : $G(t) = t - 2 \ln(t + 1)$

Les solutions de (E1) sont donc les fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par $t \longmapsto K\, e^{-t+2\ln(t+1)}$ où K est une constante réelle quelconque. Remarque : $K\, e^{-t+2\ln(t+1)} = K\, e^{-t} (t + 1)^2$.

3° Résolution de l'équation a(t)x' + b(t)x = a(t)

a) Théorème

Soit a et b deux fonctions dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ sur I. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre sur 1 $a(t)\, x' + b(t)\, x = u(t)$ dont l'inconnue x est une fonction dérivable sur I.

La solution générale de cette équation est obtenue en ajoutant une solution particulière (x_P) et la solution générale de l'équation homogène associée (x_O).

b) Exemple

Une équation différentielle linéaire du premier ordre se résout donc en trois étapes.

Equation différentielle sur $]0 ; +\infty[$ d'inconnue x : $t\, x' + x = t$.

Les trois étapes sont

- Solution générale de l'équation homogène associée " $t\, x' + x = 0$ "

$x_0 = k\, e^{-\ln t} = \frac{k}{t}$ où k est un réel quelconque.

- Solution particulière de " $t\, x' + x = t$ "

On cherche les réels a et b tels que $x_p = a\, t + b$.

$x_p = 2\, t$ est donc une solution particulière de " $t\, x' + x = t$ ".

- Solution générale de " $t\, x' + x = t$ "

$x = x_o + x_p = 2\, t + \frac{k}{t}$ où k est un réel quelconque.

c) Solutions particulières usuelles de l'équation différentielle linéaire $a\, x' + b\, x = c(t)$ (a Î IR)

- Cas où c(t) est un polynôme de degré n.

si a = 0 alors une solution particulière est un polynôme de degré n+1.

si $a \neq 0$ alors une solution particulière est un polynôme de degré n.

- Cas où $c(t) = P(t)\, e^{mt}$ où P est un polynôme.

On cherche une solution particulière de la forme $x(t) = y(t)\, e^{mt}$.

y est alors solution de l'équation $y' + (a + m)\, y = P(t)$ et on se ramène au problème précédent.

III EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE

A X " + B X ' + C X = F(T) (L)

1° Définition Equation Différentielle linéaire du deuxième ordre

On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre sur l'intervalle I de ℝ une équation de la forme :

$$a x'' + b x' + c x = f(t)$$

où a, b et c sont réels et où f est une fonction dérivable sur I

Dans cette équation, l'inconnue, notée ici x, est une fonction dérivable sur I : $t \longmapsto x(t)$ et x' désigne sa fonction dérivée sur I et x " sa fonction dérivée seconde.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables sur I qui en sont solutions.

On n'étudiera que les équations à coefficients constants $a x'' + b x' + c x = f(t)$ où a, b et c sont réels.

2° Equation homogène (ou sans second membre) associée a x " + b x ' + c x = 0 (H)

a) Théorème 1

Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (H) alors, pour tout couple de réels $(k_1 ; k_2)$, la fonction $\varphi = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2$ est aussi une solution de (H).

Démonstration

Soit φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (H) Soit k_1 et k_2 deux réels et $\varphi = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2$

$\varphi'' = k_1 \varphi_1'' + k_2 \varphi_2''$ et $\varphi' = k_1 \varphi_1' + k_2 \varphi_2'$ donc a

$\varphi'' + b \varphi' + c \varphi = a (k_1 \varphi_1'' + k_2 \varphi_2'') + b (k_1 \varphi_1' + k_2 \varphi_2') + c (k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2)$

$= k_1 (a \varphi_1'' + b \varphi_1' + c \varphi_1) + k_2 (a \varphi_2'' + b \varphi_2' + c \varphi_2) = 0$. φ est bien une solution de (H).

b) Théorème 2 (admis)

Soit deux solutions φ_1 et φ_2 (non colinéaires) alors toute solution de (H) sera de la forme $\varphi = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2$.

3° Equation caractéristique

Si l'on cherche des solutions de l'équation (H) sous la forme $\varphi\ t \longmapsto e^{r t}$ alors on peut écrire

$\varphi (t) = e^{r t}$, $\varphi '(t) = r e^{r t}$ et $\varphi ''(t) = r^2 e^{r t}$ φ solution de (H) s'écrit si et seulement si $a r^2 e^{r t} + b r e^{r t} + c e^{r t} = 0$ c'est-à-dire $a r^2 + b r + c = 0$

Définition

L'équation $a r^2 + b r + c = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $a x'' + b x' + c x = 0$

4° Résolution de l'équation homogène a x " + b x ' + c x = 0 (H)

Théorème

$\Delta > 0$: L'équation caractéristique admet deux racines réelles r' et r'' .

Les solutions de l'équation sont les fonctions $\varphi(t) = k_1 e^{r' t} + k_2 e^{r'' t}$

$\Delta = 0$: L'équation caractéristique admet une racine réelle double r .

Les solutions de l'équation sont les fonctions $\varphi(t) = (k_1 t + k_2) e^{r t}$.

$\Delta < 0$: L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées : $r' = \alpha + i \beta$ et $r'' = \alpha - i \beta$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions $\varphi(t) = e^{\alpha x} (k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t)$.

Démonstration

$\Delta = 0$ (C) admet une racine double r . La fonction f_1 définie sur ℝ par $\varphi_1 (t) = e^{r t}$ est une solution de (E).

Considérons la fonction φ_2 définie sur ℝ par : $\varphi_2 (t) = t \varphi_1(x) = t e^{r t}$ Les fonctions φ_1 et φ_2 ne sont pas colinéaires et on démontre aisément que φ_2 est solution de (E); par suite, les solutions sur ℝ de (E) sont les fonctions définies par : $\varphi (t) = A \varphi_1(t) + B \varphi_2(t) = (A t + B) e^{r t}$

$\Delta > 0$ (C)admet deux racines réelles distinctes r ' et r " Les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur ℝ par $\varphi_1(t) = e^{r' t}$ et $\varphi_2(t) = e^{r'' t}$ sont solutions de (E) et ne sont pas proportionnelles (voir préliminaire). Les solutions sur ℝ de (E) sont les fonctions f définies par : $\varphi(t) = A \varphi_1(x) = e^{r' t} + B \varphi_1(x) = e^{r'' t}$.

$\Delta < 0$ (C) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i \beta$ et $\alpha - i \beta$. Par analogie avec les deux cas ci-dessus, on considère la fonction g définie sur R par : $g(t) = e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha x} (\cos t + i \sin t)$

Cette fonction g prend ses valeurs dans ℂ; or, on cherche des solutions de (E) définies sur ℝ et à valeurs dans ℝ.

L'expression de g(t) nous suggère de considérer les fonctions $t \longmapsto e^{\alpha t} \cos \beta t$ et $t \longmapsto e^{\alpha t} \sin \beta t$, fonctions qui ne sont pas colinéaires. On peut vérifier que ces deux fonctions sont solutions de (E) et par suite, les solutions sur ℝ de (E) sont les fonctions f définies par : $f(t) = A e^{\alpha t} \cos \beta x + B e^{\alpha t x} \sin \beta t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$.

5° Cas général $a x'' + b x' + c x = f(t)$ (L)

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle linéaire $a x'' + b x' + c x = f(t)$ (L) s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.

6° Exemples de recherche de solution particulière

- Si f(x)est un polynôme de degré n alors il existe une solution particulière sous la forme d'un polynôme P(x).

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ alors le polynôme p est de degré n.

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ alors le polynôme p est de degré n + 1.

Si $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ alors le polynôme p est de degré n + 2.

- Si f(x) est de la forme $f(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x$ alors il existe une solution particulière sous la forme
- $\varphi(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ où A et B sont deux constantes à déterminer.
- Si f(x) est de la forme $f(x) = e^{mx} P(x)$ où P est un polynôme et $m \in \mathbb{R}$ alors en effectuant le changement de variable $y(x) = z(x) e^{mx}$ on montre que la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$a z'' + (2 a m + b) z' + (a m^2 + m b + c)z = P(x).$$