PROBLEME Partie A Etude du signe de x3 – 1 + 2 ln(x)

Soit g la fonction définie sur] 0 : + ∞ [par : $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln(x)$ (ln x désigne le logarithme népérien de x.)

1° Calculer g' (x) et étudier son signe.

2° Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées.)

3° Calculer g (1).

4° Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur] 0 ; + ∞ [.

Partie B Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Montrer que la droite D d'équation y = x – 1 est asymptote oblique à C Y a-t-il une autre asymptote à C . ? Si oui, donner son équation.

c) Calculer f '(x) et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

d) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de f '(x), puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote D et la courbe C . Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D .

f) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C , et la droite D .

2° a) Montrer que la fonction H définie par : $H(x) = -\dfrac{1}{x}(1 + \ln x)$

est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

b) Soit Δ le domaine plan limité par D , C et les droites d'équation x = 1 et $x = \sqrt{e}$. Hachurer Δ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de A puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.

PROBLEME Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = 2 + (2 - x)e^{2x}$.

On désigne par **C** sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$(unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1° Déterminer la limite de f en + ∞ .

2° a) Déterminer la limite de f en – ∞ (on pourra poser X = 2 x).

b) En déduire que la courbe **C** admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

c) Etudier les positions relatives de **C** et Δ .

3° a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3 - 2x)e^{2x}$, où f ' désigne la fonction dérivée de f.

b) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle] – ∞ ; + ∞ [.

4° a) Donner une équation de la tangente **T** à **C** au point d'abscisse 0.

b) Tracer Δ , **T** puis **C**.

5° Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par : $G(x) = -\dfrac{1}{2}x e^{2x} + \dfrac{5}{4}e^{2x}$.

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = (2 - x)e^{2x}$.

6° a) Hachurer la partie **A** du plan limitée par **C**, la droite d'équation y = 2 et l'axe des ordonnées.

b) Calculer l'aire de **A**. En donner la valeur exacte en unités d'aire.

Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm^2, à 10^{-2} près

PROBLEME Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = -x + \ln(2x + 2) - \ln(x + 2)$. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires :

1° Montrer que sur $]-1, +\infty[$, $(2x + 2) > 0$ et $(x + 2) > 0$.

2° Etudier le signe de $x^2 + 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que sur $]-1, +\infty[$, $x^2 + 3x + 1$ s'annule pour une et une seule valeur α dont on donnera la valeur exacte.

Partie A : Limites et asymptotes

1° Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2° a) Montrer que f(x) peut s'écrire sous la forme : $f(x) = -x + \ln 2 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

d) Déterminer la position de (C) par rapport à la droite D sur $]-1, +\infty[$.

Partie B : Etude des variations

1° Calculer la dérivée f ' de f et montrer que $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x+2)}$

2° À l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires, étudier le signe de f ' sur $]-1, +\infty[$.

3° Construire le tableau de variation de la fonction f (on se contentera d'une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f).

Partie C : Représentation graphique

1° Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $[-0{,}8 ; -0{,}4]$, une solution unique notée β. Donner un encadrement de β à 10^{-2} près .

2° Déterminer une équation de la droite T tangente à (C) au point d'abscisse 0.

3° Reproduire et compléter le tableau suivant : (on donnera les résultats arrondis à 10^{-1} près)

x	– 0,8	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
f(x)						

4° Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et (C) dans le repère donné.

EXERCICE Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$.

1° a) Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$. **b)** Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$. **c)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2° En utilisant les résultats de la question 1° c) résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

a) $4\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$ **b)** $4e^{2x} - 8e^x - 1 + \dfrac{2}{e^x} = 0$.