FONCTIONS DERIVABLES,CONTINUES

I NOMBRE DERIVE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1° Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, C_f sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et a un élément de I.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$ (où d est un réel)
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = d$
- Pour h voisin de 0 $f(a + h) = f(a) + d \times h + h \times \varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
- La courbe C_f admet au point d'abscisse a une tangente :la droite d'équation « $y = f(a) + d\,(x - a)$ »

Si f vérifie l'une des quatre conditions on dit que f est dérivable en a et le réel d est le nombre dérivé de f en a.

On note alors $d = f\,'(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$.

2° Nombre dérivé à droite à gauche

$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f_d'(a)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f_g'(a)$

exemples

$f(x) = \dfrac{\lvert x - 1\rvert + 1}{\lvert x - 1\rvert + x}$ dérivabilité en 1.	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ dérivabilité en 0	$\sqrt{1{,}00001} \approx 1 + 0{,}000005$

3° fonction dérivable sur un intervalle.

Si f admet un nombre dérivé en tout points de l'intervalle Ion dit que f est dérivable sur I.

La fonction qui a tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelé la fonction dérivée de f sur I.

On la note f '

4° Dérivées successives

f est dérivable sur I. On note $f\,' = \dfrac{df}{dx}$ sa fonction dérivée première de f (ou d'ordre 1).

f ' est dérivable sur I. On note $f\,'' = \dfrac{d^2f}{d^2x}$ la fonction dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f.

f '' est dérivable sur I. On note $f^{(3)} = \dfrac{d^3f}{d^3x}$ la fonction dérivée troisième (ou d'ordre 3) de f.

IICALCUL DE FONCTIONS DERIVEES

1° Dérivée d'une fonction composée.

<u>Théorème</u> : Soit u une fonction dérivable en x_0 et f une fonction dérivable en $u(x_0)$.

Alors fou est dérivable en x_0 et : $(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \times u'(x_0)$<u>Exemples</u> Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur I. α un réel La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$. La fonction u^α est dérivable sur I $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha \times u^{\alpha-1} \times u'}$

2° Dérivée des fonctions usuelles

fonction.	Dérivée.	Dérivabilité sur.
$f(x)\ k \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0\,[$ ou $]\,0\,;+\infty\,[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\,0\,;+\infty\,[$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

3°Dérivées etopérations

fonction.	Dérivée.
Somme : $f = u + v$	$f' = u' + v'$
Produit : $f = k \cdot u$ $f = u \cdot v$	$f' = k \cdot u'$ $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotient : v ne s'annule pas $f = \frac{1}{v}$ $f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{-v'}{v^2}$ $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Composée : $f = g \circ u$ $f = u^{\alpha}$ $f = \sqrt{u}$ (pour $u \geq 0$)	$f' = u' \times (g' \circ u)$ $f' = u' \times \alpha \times u^{\alpha-1}$ $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (pour $u > 0$)

III APLICATIONS DE LA DERIVABILITEE.

1° Dérivée et sens de variation.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f ' > 0 sur I, alors f est strictement croissante sur I

Si f ' < 0 sur I, alors f est strictement décroissante sur I

Si f ' = 0 sur I, alors f est constante sur I

2° Recherche d'extremum

Pour la recherche d'un extremum local nous disposons du théorème suivant (résultat admis)

Théorème Si f est dérivable sur l'intervalle I et admet un maximum local (ou un minimum local) en un point α distinct des extrémités de I, alors $f'(\alpha) = 0$.

3° Equation f(x) = k

Théorèmes

Si f est une fonction dérivable sur [a, b] et si, pour tout t de]a, b[, $f'(t) > 0$, alors :f est strictement croissante sur [a, b] et, pour tout élément λ de [f(a), f (b)], l'équation $f(t) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a, b].

Si f est une fonction dérivable sur [a, b] et si, pour tout t de]a, b[, $f'(t) < 0$, alors f est strictement décroissante sur [a, b] et, pour tout élément λ de [f (b), f (a)], l'équation $f(t) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a, b].

Remarque

Ces théorèmes sont notamment utilisés pour justifier l'existence de solutions pour une équation, en particulier lorsqu'on ne sait pas la résoudre directement, à l'aide du calcul algébrique.

4° Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la fonction dérivée f ' est elle aussi dérivable sur I, sa fonction dérivée (f ')' est notée f '' et est appelée dérivée seconde de f sur 1.

Lorsque cela est possible on définit les dérivées successives de f

f' f'', f''' .., $f^{(n)}$.

En physique et en mécanique on utilise la notation différentielle . $\frac{d\,f}{d\,x} = f'$ $\frac{d^2 f}{dx^2} = f''$…