FONCTION RECIPROQUE D'UNE FONCTION DERIVABLE ET STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE.

1° La fonction carré est dérivable et strictement monotone sur [0 ; 2]

D'après le théorème :

pour tout y de [0, 4] l'équation $t^2 = y$, où l'inconnue est t, a une solution unique dans [0, 2]. On sait que : $t = \sqrt{y}$.

On peut donc associer à tout nombre y de [0, 4] le nombre réel unique t de [0, 2] tel que $t^2 = y$, c'est-à-dire $t = \sqrt{y}$.

La fonction racine carrée définie sur [0,4] est la fonction réciproque de la fonction carré définie sur [0,2].

Remarques : Pour tout t de [0, 4], $\left(\sqrt{t}\right)^2 = t$ et pour tout t de [0 ; 2] $\sqrt{t^2} = t$

Représentation graphique

Le plan est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Les courbes représentatives des fonctions racine carrée et carré se déduisent l'une de l'autre par symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y = t.

2° Cas général

a) Définition Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur un intervalle [a, b].

Pour tout y de [f(a), f(b)] l'équation f(t) = y, dont l'inconnue est t, a une solution unique dans [a, b].

On peut définir une nouvelle fonction, appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1}, définie sur [f (a), f(b)] et prenant ses valeurs dans [a, b].

La fonction réciproque f^{-1} de f est définie par: $\begin{cases} y = f(t) \\ t \in [\, f(a), f(b)\,] \end{cases}$ si, et seulement si, $\begin{cases} t = f^{-1}(y) \\ y \in [\, a , b\,] \end{cases}$

Soit f une fonction dérivable et strictement décroissante sur un intervalle [a, b].

Pour tout y de [f(b), f(a)] l'équation f(t) = y, dont l'inconnue est t, a une solution unique dans [a, b].

On peut définir une nouvelle fonction, appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1}, définie sur [f (a), f(b)] et prenant ses valeurs dans [a, b].

La fonction réciproque f^{-1} de f est définie par: $\begin{cases} y = f(t) \\ t \in [\, f(b), f(a)\,] \end{cases}$ si, et seulement si, $\begin{cases} t = f^{-1}(y) \\ y \in [\, a , b\,] \end{cases}$

b) Représentation graphique

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y = t.

3° Autres exemples de fonctions réciproques rencontrées en Terminale

a) Fonction exponentielle

La fonction exponentielle a été introduite comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, en admettant que le théorème s'étend au cas où [a, b] est remplacé par] 0, + ∞ [

et [f(a), f(b)] par $\mathbb{R}$ ($\lim\limits_{t \to 0} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

b) Fonction racine $n^{\text{ième}}$ Soit n un nombre entier naturel non nul.

La fonction t -, t^n est dérivable et strictement croissante sur [0, + ∞ [et $\lim\limits_{x \to +\infty} t^n = +\infty$

La fonction $t \longmapsto t^n$ admet une fonction réciproque, appelée racine $n^{\text{ième}}$ et notée $\sqrt[n]{t}$, définie sur [0, + ∞ [et prenant ses valeurs dans [0, + ∞ [$\begin{cases} y = \sqrt[n]{t} \\ t \in [\, 0 , +\infty\, [\end{cases}$ si, et seulement si $\begin{cases} t = y^n \\ y \in [\, 0 , +\infty\, [\end{cases}$

Remarque

Pour tout t > 0, $t^{1/n}$ est défini par $t^{1/n} = e^{1/n \ln t}$.

Pour tout t > 0, les nombres $t^{1/n}$ et $\sqrt[n]{t}$ sont égaux car leur puissance n

On étend cette égalité au cas où t = 0 en posant $0^{1/n} = 0$.

Pour tout $t \geq 0$, $\sqrt[n]{t} = t^{1/n}$.

FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES

1° Fonction Arcsin

La fonction sinus est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Elle admet donc une fonction réciproque, appelée arc sinus et notée Arcsin, définie sur [–1, 1] et prenant ses valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\begin{cases} y = \text{Arcsin}\, t \\ t \in [-1, 1] \end{cases}$ si, et seulement si, $\begin{cases} t = \cos y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Les courbes représentatives des fonctions Arcsin et sin se déduisent l'une de l'autre par symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y = t.

Aux points d'abscisses $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ la courbe représentative de la fonction sinus a une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Par symétrie la courbe représentative de la fonction Arcsin a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées aux points d'abscisses –1 et 1.

2° Fonction Arccos

La fonction cosinus est dérivable et strictement décroissante sur [0, π].

Elle admet donc une fonction réciproque, appelée arc cosinus et notée Arccos, définie sur [– 1, 1] et prenant ses valeurs dans [0, π]. $\begin{cases} y = \text{Arccos}\ t \\ t \in [-1, 1] \end{cases}$ si et seulement si, $\begin{cases} t = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$

Aux points d'abscisses 0 et π la courbe représentative de la fonction cosinus a une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Par symétrie, la courbe représentative de la fonction Arccos a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées aux points d'abscisses – 1 et 1.

3° Fonction Arctan

La fonction tangente est dérivable et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

La restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a pour limites en $-\frac{\pi}{2}$ et $-\infty$ en 2.

On admet que le théorème s'étend au cas où [a, b] est remplacé par $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et [f (a), f (b)] par $]-\infty, +\infty[$

la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Cette fonction a donc une fonction réciproque, appelée arc tangente et notée Arctan, définie sur ℝ et prenant ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\begin{cases} y = \text{Arctan}\, t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} t = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation y = t, les asymptotes verticales de la courbe représentative de la fonction tan se transforment en asymptotes horizontales, d'équations $y = -\frac{\pi}{2}2$ et $y = \frac{\pi}{2}$, de la courbe représentative de la fonction Arctan.

4° Dérivées des fonctions circulaires réciproques

Théorème

• Pour tout t de l'intervalle] – 1 , 1 [

$(\text{Arcsin})'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $(\text{Arccos})'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

• Pour tout nombre réel t,

$(\text{Arctan})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$