

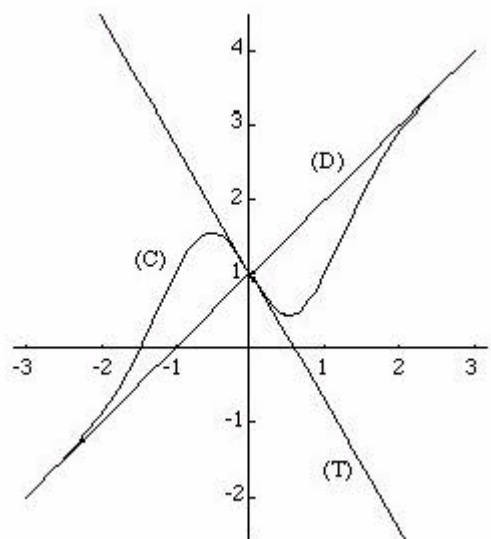
Devoir maison.

Ci-contre figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.

On sait que le point J (0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points

K (-1 ; 0) et J, que la tangente (T) a pour équation :

$$y = (1 - e) x + 1.$$



Partie A

Expression de f

1° Déterminer une équation de (D).

2° On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$f(x) = m x + p + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

a) Déterminer m et p .

b) Montrer que, pour tout réel x , on a $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que la fonction φ est impaire puis que la fonction f' , dérivée de f , est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel x , $\varphi(x) = (a x + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Montrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que $a = -e$ et $b = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x - x e^{-x^2+1}$ et on suppose que la courbe (C) représente la fonction f dans le repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1° a) Montrer que, pour tout réel x , la dérivée f' de f vérifie : $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$. Calculer $f'(0)$.

b) Vérifier que (T) est bien la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

Etudier la position relative de la courbe (C) et de sa tangente (T).

2° Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur $[0; 1]$.

a) Montrer que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; 1]$.

c) Montrer que $0,51 < \alpha < 0,52$.

d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α .