

Simplification d'expressions avec logarithme et exponentielle

Simplifier l'écriture des expressions suivantes

$\ln e^{-1}$	$\ln e^2$	$\ln \sqrt{e}$	$\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$	$e^{\ln 2}$	$e^{-\ln 3}$	$e^{2 \ln 2}$	$e^{(\ln 3)/2}$
--------------	-----------	----------------	--------------------------	-------------	--------------	---------------	-----------------

Résolution d'équations avec logarithme ou exponentielle Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (c'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels t ou x pour lesquels l'égalité suivante est vraie)

$\ln t + \frac{1}{2} = 0$	$e^t - 2 = 0$	$e^{2t} - 4e^t + 3 = 0$	$2 \ln x = \ln 3 + \ln (2x + 3)$	$\ln x^2 = \ln 3 + \ln (2x + 3)$
---------------------------	---------------	-------------------------	----------------------------------	----------------------------------

Résolution d'équations avec sinus ou cosinus

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) = 0$ et représenter ses solutions par des points du cercle trigonométrique.
- b) Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation : $1 - \sin 3t = 0$ et représenter ses solutions par des points du cercle trigonométrique.
- c) Déterminer les nombres réels constants α et φ , avec $\alpha > 0$ et $0 \leq \varphi < \pi$, tels que, pour tout nombre réel t , $\cos 3t + \sin 3t = \alpha \cos (3t - \varphi)$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3t + \sin 3t = -1$.

Enclume et marteau Lors de l'étude du choc d'un marteau sur une enclume munie d'un système d'amortisseurs, on est amené à considérer l'expression : $f(t) = 50,7 \cos (15,6 t) + 2,6 \sin (15,6 t)$.

Résoudre dans l'intervalle $[0, 1]$, à 10^{-2} près, l'équation $f(t) = 0$.

On rappelle que les solutions de l'équation $\tan x = \tan a$ sont de la forme $x = a + k\pi$, k étant un nombre entier relatif quelconque.

Etudes de signe : où il faut résoudre une inéquation

Avec un logarithme

Etudier le signe de $1 + \ln t$ lorsque t varie dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Avec un polynôme (et une exponentielle)

Etudier le signe de $(-x^2 + 2x)e^{-x}$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

Avec une exponentielle

Etudier le signe de $e^{x/5} - 1$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

Avec une exponentielle

Etudier le signe de $3e^{-t} - 1$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$.

Avec un cosinus

Etudier le signe de $\cos (t + 4)$ lorsque t varie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Détermination de limites

Avec une fonction polynôme Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$	b) $f(x) = x^3 + x + 1$.
----------------------------	---------------------------

Avec une fonction rationnelle Déterminer les limites en $\frac{1}{3}$ et en $+\infty$ de la fonction définie sur $] \frac{1}{3}, +\infty[$ par:

a) $f(t) = \frac{t+1}{3t-1}$	b) $g(t) = \frac{t^2+1}{3t-1}$	c) $h(t) = \frac{1}{3t-1}$
------------------------------	--------------------------------	----------------------------

Avec une fonction rationnelle

Déterminer les limites en -2 et en 2 de la fonction définie sur $] -2, 2[$ par : $f(t) = \frac{t+3}{t^2-4}$

Avec un logarithme Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\text{a) } f(t) = t + \ln t \qquad \text{b) } f(t) = t + \frac{\ln t}{t}$$

Avec un logarithme

Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

Indication: Pour la limite en 0 , mettre x en facteur dans $f(x)$.

Avec un logarithme

Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \ln x$.

Indication: Mettre x^2 en facteur dans $f(x)$ pour déterminer la limite en $+\infty$.

Avec une exponentielle

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: a) $f(t) = e^t + e^{-t}$ b) $f(t) = t + 1 + e^t$.

Avec une inégalité

a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \ln t - \sqrt{t}$.

b) En déduire que, pour tout nombre réel t strictement positif, $\ln t < \sqrt{t}$.

c) De l'inégalité obtenue au 2°, déduire que, pour tout nombre réel t tel que $t \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln t}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$

d) En utilisant un théorème concernant limites et inégalités, en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.

Recherche d'asymptotes

Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

Ecrire une équation de chacune des éventuelles asymptotes parallèles aux axes de coordonnées de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$a) f: \begin{cases}]-1 \\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{-x+2}{x+1} \end{cases} \quad b) f: \begin{cases}]-\infty \\ -2[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2+4}{x^2+x-2} \end{cases}$$

Deux asymptotes dont une oblique Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(t) = \frac{t^2 + 3t + 4}{t - 2}$

a) Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que pour tout nombre réel t de $]2, +\infty[$, $f(t) = at + b + \frac{c}{t-2}$

b) En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

c) La courbe représentative de f admet-elle une autre asymptote? Si oui, en donner une équation.

Position de la courbe par rapport à une asymptote

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote de la courbe C . Etudier la position de C par rapport à Δ .

Fonction exponentielle et Asymptotes

Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{e^t - 2}{e^t + 1}$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes de la courbe C .

Où la courbe coupe l'asymptote

On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}e^x - x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, en écrivant $f(x)$ sous la forme : $f(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-x} - xe^{-2x}\right)$

b) Trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, Déterminer la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $-\infty$.

c) Etudier la position de C par rapport à la droite Δ d'équation $y = -x$. On précisera en particulier les coordonnées du point commun à C et à Δ .

Calcul de dérivées

Fonctions polynômes Déterminer la dérivée des fonctions suivantes:

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 5t - 7$

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (4t - 2)(-t + 1)$.

Fonctions polynômes et puissances Déterminer la dérivée des fonctions suivantes: f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(t) = (-2t + 3)^2$	$f(x) = (x^2 + 1)^2$	$f(x) = (-2x^2 + x - 1)^4$	$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$
----------------------	----------------------	----------------------------	--------------------------------

Fonctions rationnelles Déterminer la dérivée des fonctions suivantes f définie sur I par:

$I = \mathbb{R} : f(t) = \frac{(3t + 1)}{t^2 + 2t + 3}$	$I =]-2, 2[: f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 4}$	$I =]-\infty; 3[: f(t) = \frac{2t^2 - 3t + 1}{t - 3}$
---	--	---

Fonctions rationnelles et puissances : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes: f définie sur I par

$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{(2x - 3)^2}{3x^2 + 1}$	$I =]1, +\infty[: f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{(x - 1)^2}$	$I =]-\infty; 3[: f(t) = \left(\frac{2t}{t - 3}\right)^2$
---	---	---