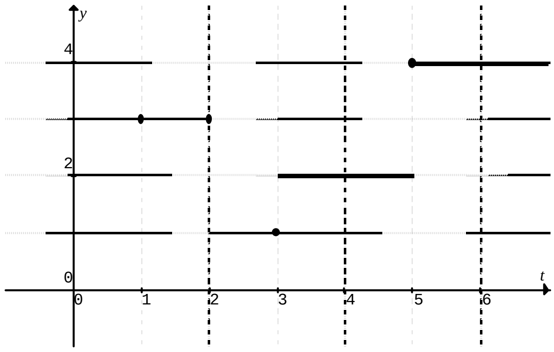
FONCTIONS ET COURBES DE RÉFÉRENCE

I FONCTIONS EN ESCALIER

Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.
Sa représentation graphique est constituée de segments de droite ou de demi-droites parallèles à l'axe des abscisses.
Par exemple, soit f la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par
$f(t)=3$ si $1 \leq t \leq 2$,
$f(t)= 1$ si $2 < t \leq 3$,
$f(t)=2$ si $3 < t < 5$,
$f(t)=4$ si $t \geq 5$.



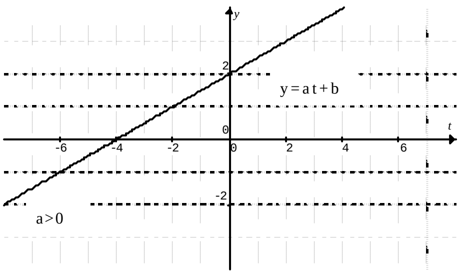
II FONCTIONS AFFINES

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = a t + b$ où a et b sont des nombres réels fixés avec $a \neq 0$. Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t, $f'(t) = a$.

Cas a> 0	Cas a < 0
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	f est strictement décroissante sur R

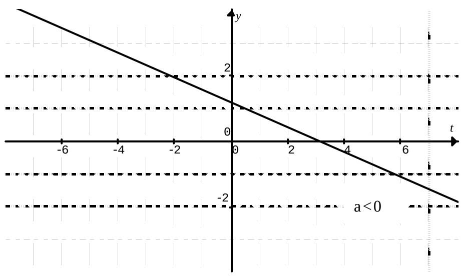
Cas $a > 0$:

t	$-\infty$	$+\infty$
signe de f '	+	
f	$-\infty$	$+\infty$



Cas $a < 0$:

t	$-\infty$	$+\infty$
signe de f '	–	
f	$+\infty$	$-\infty$



Une fonction affine par morceaux est une fonction affine par intervalles. Sa représentation graphique est constituée de segments de droite ou de demi-droites non parallèles aux axes de coordonnées.

III FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT ENTIER

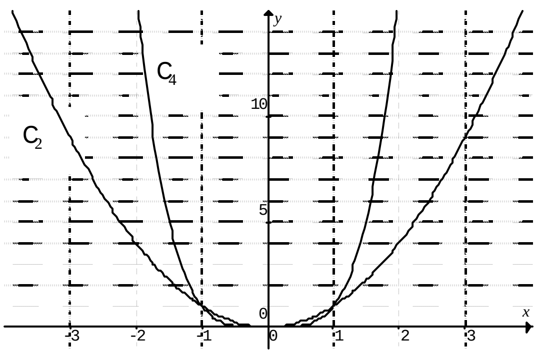
1° Fonctions puissances d'exposant entier strictement supérieur à 1

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, où n est un nombre entier strictement supérieur à 1.
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t, $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$.

Cas n pair	Cas n impair
f_n paire C_n symétrique par rapport à l'axe des ordonnées	f_n impaire C_n symétrique par rapport à l'origine du repère

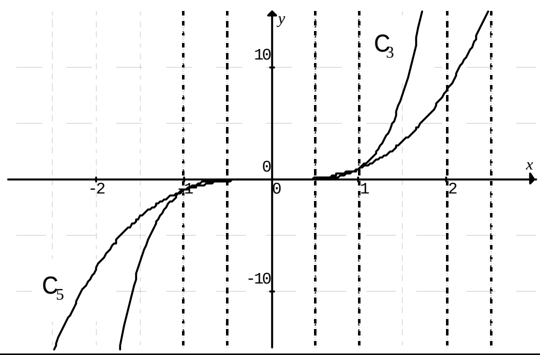
Cas n pair :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de f '(x)	–		+
f		0	



Cas n impair :

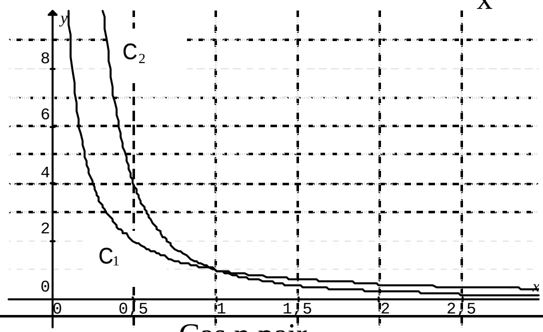
x	$-\infty$	$+\infty$
signe de f '(x)	+	
f		



2° Fonctions puissances d'exposant entier strictement négatif Soit g_n et h_n les fonctions définies respectivement sur] 0, + ∞ [et sur] – ∞ , 0 [par $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$ et $h_n(x) = \frac{1}{x^n}$ où n est un nombre entier strictement positif. g_n et h_n sont dérivables sur l'intervalle où elles sont définies; pour tout x de] 0 , + ∞ [; $g_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ et pour tout x de]– ∞ , 0[, $h_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Etude de g

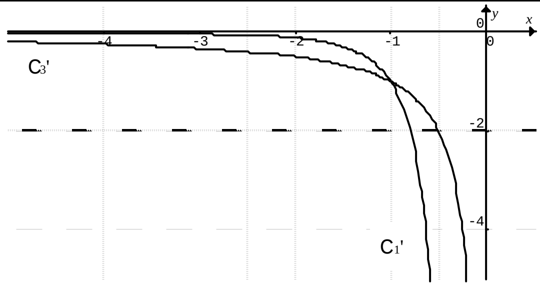
x	0	+ ∞
signe de g '(x)	‖ +	
g	‖ – ∞ ↗	0



Etude de h

Cas n impair

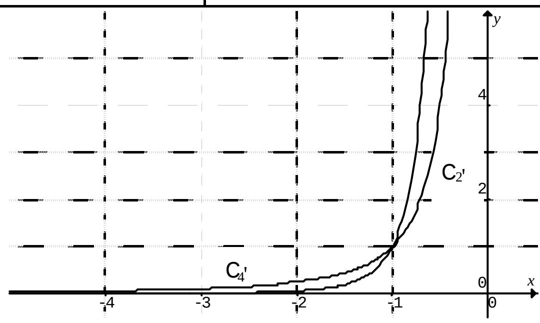
x	–∞	0
signe de h '(x)	–	‖
h	0 ↘ – ∞	‖



C_n et C_n' sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Cas n pair

x	–∞	0
signe de h '(x)	+	‖
h	0 ↗ + ∞	‖



C_n et C_n' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Dans chaque cas, les axes des coordonnées sondes asymptotes des courbes C_n et C_n'.

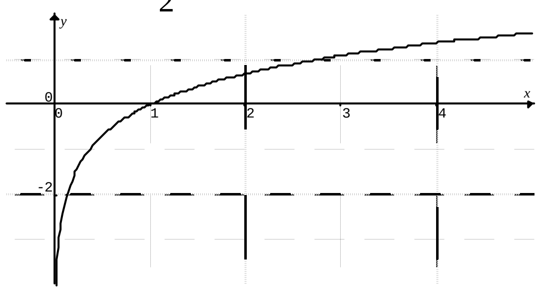
IV FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1° Définition La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur] 0, + ∞ [qui prend la valeur 0 pour x = 1. La fonction ln est définie sur] 0 ; + ∞ [

2° Relation fonctionnelle Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, pour tout nombre entier relatif n, $\ln ab = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

3° Variations. Courbe représentative

x	0	1	+ ∞
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	+	
ln x	‖ – ∞ ↗	0	+ ∞



La courbe représentative de la fonction ln a pour asymptote l'axe des ordonnées.

V FONCTION EXPONENTIELLE

1° Définition. La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe le nombre strictement positif unique y tel que x = ln y. $\begin{cases} \mathbb{R} \longmapsto\ ]0, +\infty[\\ \exp : x \longmapsto y = \exp x \text{ défini par } x = \ln y. \end{cases}$

Pour tout nombre réel x on note : $\exp x = e^x$

2° Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b, pour tout nombre entier relatif n,

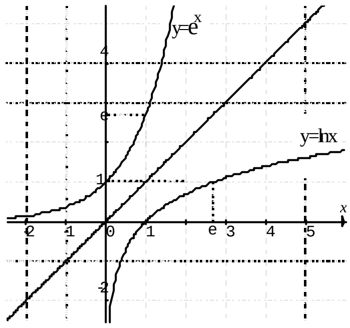
$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $(e^a)^n = e^{na}$

3° Variations.

Courbe représentative

Les courbes représentatives des fonctions exp et ln se déduisent l'une de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y = x.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = e^x$	+
f	0 ↗ $+\infty$



VI FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT RÉEL

1° Définitions

Pour tout a de] 0, + ∞ [et tout b de ℝ, $a^b = e^{b \ln a}$. a étant un nombre réel, la fonction puissance (d'exposant) a, notée f_a, est la fonction qui, à tout nombre x de] 0, + ∞ [, associe $fa(x) = x^a$ c'est-à-dire $f_a(t) = e^{a \ln x}$.

Exemple

Dans le cas où $a = \dfrac{1}{2}$, pour tout t de] 0, + ∞ [= $e^{\ln x/2} = \sqrt{x}$

La fonction « puissance 2 » est la fonction racine carrée.

2° Dérivée d'une fonction puissance

En utilisant la définition et le théorème de dérivation des fonctions composées, on établit :

Pour tout nombre réel a, la fonction $f_a : x \longmapsto x^a$ est dérivable sur] 0 , + ∞ [et $f_a'(t) = a\ x^{a-1}$.

3° Sens de variation d'une fonction puissance.

Dans le cas où a = 0, la fonction $f_0 : x \longmapsto x^0 = 1$ est constante sur] 0 , + ∞ [.

Dans le cas où a ≠ 0, sur] 0, + ∞ [, $f_a'(t) = a\ x^a$ est du signe de a.

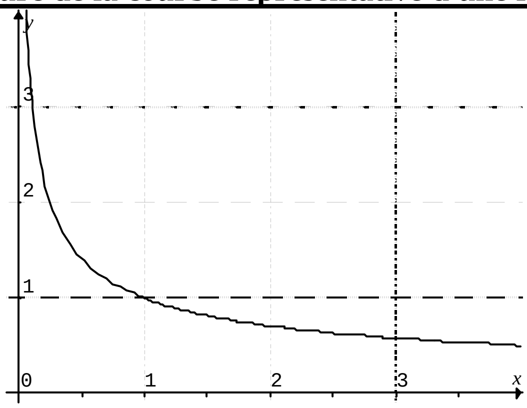
Cas a < 0

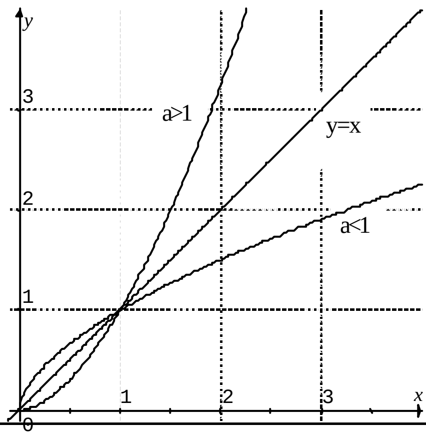
x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_a'(x) = a\ x^{a-1}$	+
f_a	

Cas a > 0

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_a'(x) = a\ x^{a-1}$	+
f_a	

4° Allure de la courbe représentative d'une fonction puissance





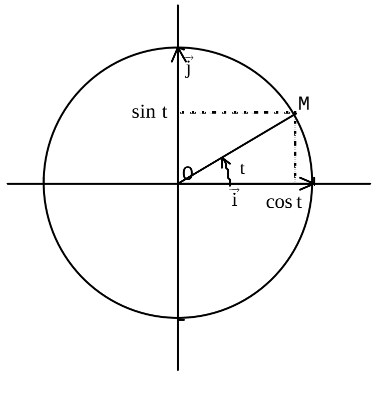
VII FONCTIONS CIRCULAIRES

1° Définitions

On appelle cercle trigonométrique °U dans le plan muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ le cercle de centre O, de rayon 1, pour lequel on choisit pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

A tout nombre réel t, on associe le point unique M du cercle tel qu'une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ soit t.

On définit ainsi les fonctions circulaires cosinus et sinus $t \longmapsto \cos t$: abscisse de M, $t \longmapsto \sin t$: ordonnée de M. Ces deux fonctions sont définies sur ℝ et prennent leurs valeurs dans l'intervalle [– 1, 1].



1° Période

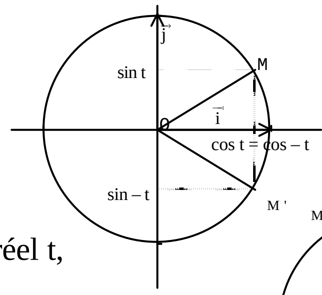
Pour tout nombre réel t, cos (t + 2 π) = cos t et sin (t + 2 π) = sin t.

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2 π.

En physique on utilise des fonctions de la forme : $f : t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $f : t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

Ces fonctions ont pour période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

2° Parité

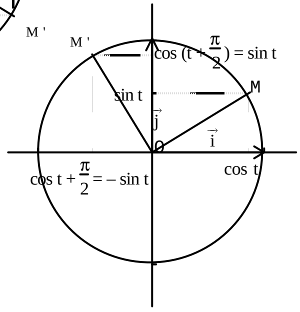


Les points M et M' de la figure ci-contre étant symétriques par rapport à l'axe des abscisses, on a, pour tout t de ℝ

cos (– t) = cos t et sin (– t) = – sin t.

La fonction cosinus est paire. La fonction sinus est impaire.

3° Dérivées



Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur ℝ et, pour tout nombre réel t,

sin' t = cos t et cos' t = – sin t.

En physique ce résultat est parfois interprété sous la forme

sin' t = sin $(t + \frac{\pi}{2})$ et cos' t = cos $(t + \frac{\pi}{2})$; dériver revient à tourner d'un angle droit dans le sens positif

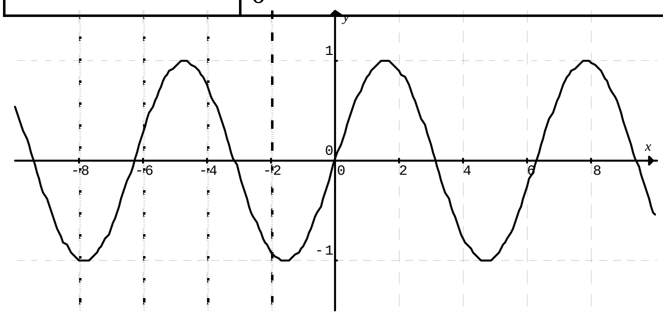
4° Variations. Courbes représentatives

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2 π, il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2 π ; ces fonctions étant paire ou impaire, on a intérêt à choisir [– π,π] :

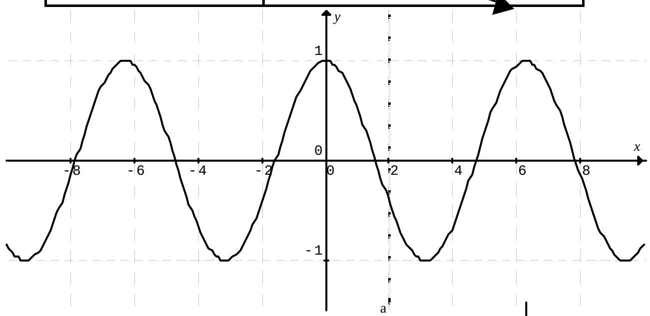
l'intervalle d'étude peut alors se réduire à [0, π].

La courbe représentative entière se déduira de la courbe obtenue lorsque t parcourt [0, π] d'abord par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la fonction cosinus ou par rapport à O pour la fonction sinus, puis par translations successives de vecteur $2\pi\,\vec{i}$ ou $-2\pi\,\vec{i}$.

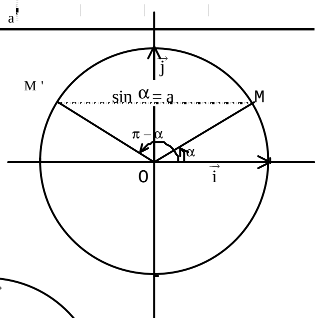
t	–0		π/2		+π
f '(t) = cos t	1	+	0	–	– 1
sin	0	↗	1	↘	0



t	0		π
f '(x) = – sin t	0	–	0
cos	1	↘	– 1



5° Equations sin t = a



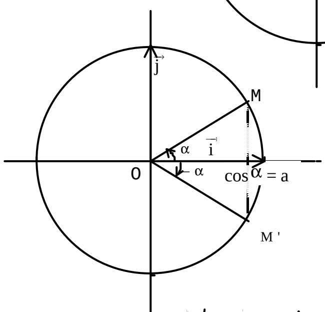
1ier cas a ∉ [– 1, 1] ; l'équation sin t = a n'a pas de solution.

2ième cas a ∈ [– 1, 1] ; il existe α dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, unique, tel que sin α = sin a.

L'équation sin t = sin α admet deux types de solutions

$$\begin{cases} (1)\ t = \alpha + k\,2\pi \\ (2)\ \ t = \pi - \alpha + k\,2\pi \end{cases}$$ ù k est un nombre entier relatif quelconque.

6° Equations cos t = a



1ier cas a ∉ [– 1, 1] ; ; l'équation cos t = a n'a pas de solution.

2ième cas a ∈ [– 1, 1] ; il existe α dans [0 , π], unique, tel que cos α = cos a.

L'équation cos t = cos α admet deux types de solutions

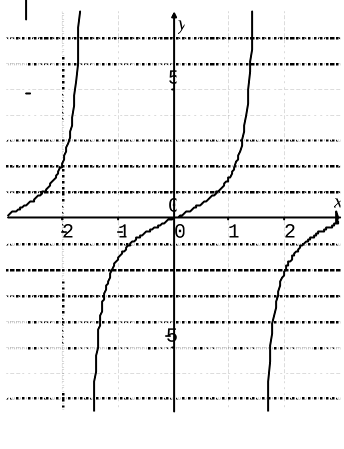
$$\begin{cases} (1)\ \ \ t = \alpha + k\,2\pi \\ (2)\ \ \ t = -\alpha + k\,2\pi \end{cases}$$ où k est un nombre entier relatif quelconque.

7° Fonction tangente

La fonction tangente est définie pour tout t réel tel que $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif,

par tan t = $\frac{\sin t}{\cos t}$

t	0		π/2
tan'(t) = 1 + tan²		+	‖
tan	0	↗	+ ∞ ‖



La fonction tangente est périodique, de période π.

La fonction tangente est impaire.

Pour tout $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ∈ ℤ), tan' t = $\frac{1}{\cos^2 t}$ = 1 + $\tan^2$ t