Intégration d'inégalité.

$\boxed{1}$ On considère la fonction logarithme népérien ; soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal et A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et e.

1° Donner le nombre dérivé de cette fonction pour la valeur e.
En déduire que la tangente en B à $\mathcal{C}$ est la droite (OB).

2° Déterminer des équations cartésiennes des droites (OB) et (AB).

3° a) Représenter $\mathcal{C}$, (OB), (AB).

b) Par simple observation de la figure, établir que, sur [1 ; e] : $\frac{x-1}{e-1} \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$.

En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^e \ln x \, dx$,sans chercher à calculer I.

$\boxed{2}$ On se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_3^4 \frac{\ln x}{x+2} dx$ sans la calculer.

1° On considère la fonction g définie sur l'intervalle [3 ; 4] par: $g(x) = x + 2 - x \ln x$.
a) Calculer g'(x).
b) Etablir le tableau de variation de g.
c) Donner l'arrondi d'ordre 1 de g(4) .
En observant le tableau de variation de g , en déduire que, sur [3 ; 4], on a $g(x) > 0$.

2° a) Soit f la fonction définie sur [3 ; 4] par $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$ Vérifier que, pour tout x de [3 ; 4], on a :

$f'(x) = \frac{g(x)}{x\,(x+2)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f et établir que, pour tout x de [3 ; 4], on a $f(3) \leq f(x) \leq f(4)$
c) En utilisant le résultat précédent, obtenir un encadrement de l'intégrale I.

Inégalité de la moyenne

$\boxed{3}$ On appelle valeur moyenne d'une fonction f dérivable sur [a ; b]

le réel $\mu = \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$

Pour chacune des fonctions dérivables sur [a ; b 1 données dans le tableau ci-après
• prouver que $m \leq f \leq M$ sur [a ; b] ;
• calculer $I = \int_a^b f(x)\,dx$;
• donner les encadrements de I et $\frac{I}{b-a}$ donnés par l'inégalité de la moyenne;
• donner la valeur moyenne μ de f sur [ci; b] .

	f(x)	a	b	m	M
1.	x^6	0	3	0	729
2.	x^6	–3	3	0	729
3.	$\frac{1}{x}$	1	1^e	$\frac{1}{e}$	1
4.	x^5	– 1	1	–1	1
5.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	1	100	0,1	1
6.	$2^x = e^{x\ln 2}$	1	3	2	8
7.	$\cos \omega x$ $\omega > 0$	0	$\frac{\pi}{\omega}$	– 1	1

Valeur moyenne d'une fonction positive

$\boxed{4}$ Pour chaque question de cet exercice, on fera un dessin dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique l cm. Les aires sont mesurées en cm^2.

1° On considère la surface S_1 limitée par la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$,l'axe des abscisses, et les droites d'équations y = 0 et y = 3 . Soit C(3 ; 0) .
a) Calculer l'aire A_1 de S_1.
b) Calculer la hauteur m_1 d'un rectangle de côté [OC] situé au-dessus de l'axe des abscisses, dont l'aire est A_1 .
c) Calculer la valeur moyenne de f (x) = 3 x sur [0 ; 3] , et comparer à m_1 .

2° On considère la surface S_2 limitée par la courbe d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = 1 et x = 3 .
a) Calculer le réel m_2 tel qu'un rectangle de largeur 2 et de hauteur m_2 ait la même aire A_2 que S_2 .
b) Montrer que m_2 est la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur [1 ; 3] .