

APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL

I CALCUL D'AIRES ET DE VOLUMES

1° Aires

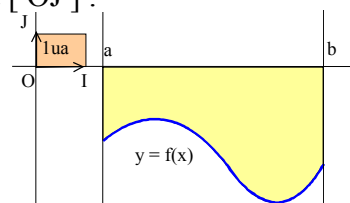
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

L'unité d'aire sera $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments $[OI]$ et $[OJ]$.

a) Fonction positive : Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

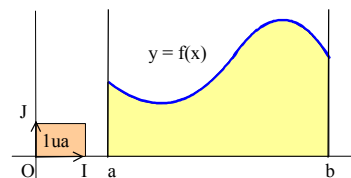
$$a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

$$\text{alors } \mathcal{A}(E) = \int_a^b f(x) dx$$



b) Fonction négative : Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$

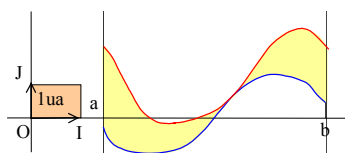
$$\text{alors } \mathcal{A}(E) = - \int_a^b f(x) dx$$



c) Entre deux courbes : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a, b]$ et E l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$

$$\text{alors } \mathcal{A}(E) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$



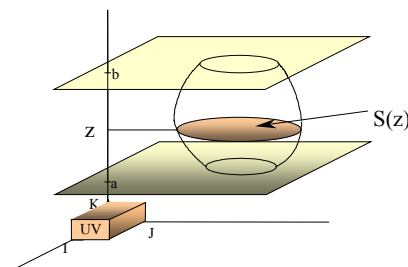
2° Volumes

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

L'unité de volume sera $OI \times OJ \times OK$, volume du parallélépipède ayant pour côtés les segments $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$.

a) Solide : On suppose que la section du solide D de l'espace par un plan $\mathcal{P}$ parallèle à xOy de cote z a une aire $S(z)$ connue qui soit une fonction continue de z alors le volume du solide D compris entre les plans de cotes respectives a et b est

$$\mathcal{V}(D) = \int_a^b S(z) dz$$

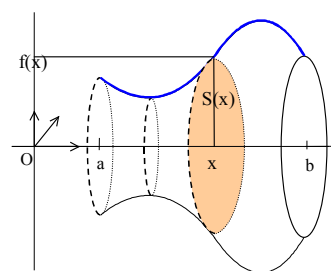


Remarque : On obtient des résultats analogues avec des plans parallèles à yOz ou parallèles à xOy .

b) Solide de révolution :

Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses d'un domaine limité par une courbe $y = f(x)$.

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par le domaine (E) est $\mathcal{V}(E) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$



II VALEUR MOYENNE ET VALEUR EFFICACE

a) Définition : La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Remarque : Dans le cas f positive sur $[a, b]$, si on écrit : $\int_a^b f(x) dx = \mu (b-a)$ alors μ représente la valeur d'une fonction constante dont l'aire sur l'intervalle $[a, b]$ est la même que celle engendrée par f .

b) Définition : La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$. On appelle **valeur quadratique moyenne** de f sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité e définie par $e^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Cette quantité est aussi appelée **Valeur efficace** de f sur $[a, b]$.

III CENTRES D'INERTIES ET MOMENTS D'INERTIE

1° Centre d'inertie (on dit aussi barycentre ou centre de gravité)

a) Rappel : Le barycentre d'un système de points $A_1 (m_1)$; $A_2 (m_2)$; ... ; $A_n (m_n)$ est déterminé par l'égalité

$$\text{vectorielle } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} (m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$$

Ses coordonnées sont données par les formules : $X = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$; $Y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$; $Z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

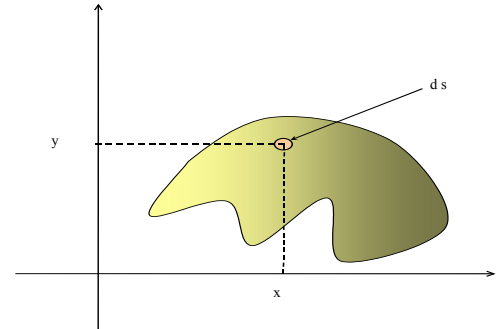
b) Cas d'une plaque homogène

Dans le cas d'une plaque homogène d'épaisseur uniforme, si on considère un petit élément d'aire ds autour d'un point $M(x, y)$ et si ρ est la densité superficielle, la masse de cet élément est $m = \rho ds$. Les formules (1) s'écrivent

$$\text{alors : } X = \frac{\sum \rho x ds}{\sum \rho ds}; Y = \frac{\sum \rho y ds}{\sum \rho ds}$$

$$\text{En simplifiant on obtient : } X = \frac{\sum x ds}{\sum ds}; Y = \frac{\sum y ds}{\sum ds}$$

$$\text{Le passage au continu donne : } X = \frac{\int x ds}{\int ds}; Y = \frac{\int y ds}{\int ds}$$



c) Cas d'une fonction continue et positive

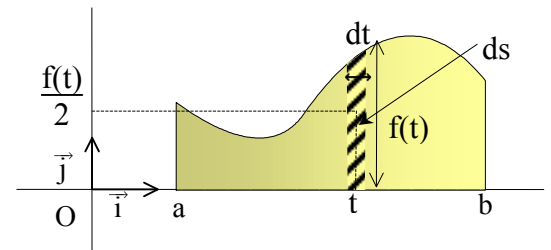
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$ et la plaque homogène ensemble des points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations :

$$a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

Les coordonnées X et Y du centre d'inertie G sont données par :

$$X = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \text{ et } Y = \frac{1}{2} \times \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$f(x) dx \text{ correspond à } ds \quad \frac{f(x)}{2} \text{ correspond à } y.$$



II MOMENTS D'INERTIE

a) Rappel : Par rapport à un point O , (ou une droite Δ ou un plan $\mathcal{P}$) le système de points matériels $M_1, M_2, \dots, M_n$ de masses respectives $m_1, m_2, \dots, m_n$ et dont les distances au point O (ou à la droite Δ ou au plan $\mathcal{P}$) sont respectivement $d_1, d_2, \dots, d_n$ a un moment d'inertie égal à :

$$m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \dots + m_n d_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$$

b) Cas d'une fonction continue et positive

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(t)$ et les droites d'équations $t = a$ et $t = b$ et sa densité superficielle ρ est égale à 1.

Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation $t = \lambda$ est donné par

$$M = \int_0^1 (\lambda - t)^2 f(t) dt.$$

$$d = |\lambda - t| \text{ et } m \text{ correspond à } \rho ds = f(t) dt$$

