# PRIMITIVES D'UNE FONCTION DÉRIVABLE SUR UN INTERVALLE

## 1° Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur 1 lorsqu'elle est dérivable sur I et que F ' = f

**Théorème (admis)**

Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

## 3° Ensemble des primitives d'une fonction dérivable sur un intervalle

**Théorème**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Parmi les primitives de f définies sur I, il en existe une, et une seule, prenant une valeur donnée $y_0$ pour une valeur donnée $t_0$ de la variable.

## 4° Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées

**a) Primitives des fonctions usuelles**

Dans le tableau ci-dessous, f est une fonction définie sur un intervalle et F est une primitive quelconque de f avec C constante réelle.

| ,f(t) | F(t) | Intervalle de validité |
|---|---|---|
| a | a t | $\mathbb{R}$ |
| t | $\frac{t^2}{2} + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $\frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{t}$ | ln t + C | ] 0 , + ∞ [ |
| $\frac{1}{t^n} = t^{-n}$ <br> $n \in \mathbb{N}^* - \{ 1 \}$ | $\frac{1}{-n+1} t^{-n+1} + C$ <br> $= -\frac{1}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} + C$ | ] 0 , + ∞ [ ou ] – ∞ , 0 [ |
| $e^t$ | $e^t + C$ | $\mathbb{R}$ |
| sin t | – cos t + C | $\mathbb{R}$ |
| cos t | sin t + C | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$ | tan t + C | $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ | arc sin t + C | ] – 1 , 1 [ |
| $\frac{1}{t^2+1}$ | arc tan t + C | $\mathbb{R}$ |

**b) Primitives d'une somme de fonctions, primitives du produit d'une fonction par un nombre réel**

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que:

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si G est une primitive de g sur I. alors F + G est une primitive de f + g sur I.
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, si a est un nombre réel, alors a F est une primitive de a f sur I.

c) Conséquences du théorème sur la dérivation d'une fonction composée

Une fonction f définie sur un intervalle I par f (t) = g (u(t)) × u' (t), où u une fonction dérivable sur l'intervalle I et g est une fonction dérivable sur l'intervalle u (I) a pour primitives les fonctions F définies sur I par :

F(t) = G (u(t)) + C, où G est une primitive de g sur u(I) et où C est une constante réelle quelconque.

**4° Utilisation des résultats sur la dérivation de fonctions composées g o u**

f est une fonction définie sur un intervalle 1, u est une fonction dérivable sur 1, F est une primitive quelconque de f, définie sur 1, C est une constante réelle quelconque.

| f (t) | F(t) |
|---|---|
| sin (a t + b) | $-\frac{1}{a}\sin(a\,t + b) + C$ |
| cos (a t + b) | $\frac{1}{a}\cos(a\,t + b) + C$ |
| g(a t + b) | $\frac{1}{a}G(a\,t + b) + C$ |
| où g est dérivable sur u (I) | où G est une primitive de g |
| $[u(t)]^n \times u'(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $\frac{[u(t)]^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{u'(t)}{u(t)}$ où u est à valeurs strictement positives sur I. | $\ln u(t) + C$ |
| $\frac{u'(t)}{u(t)}$ où u est à valeurs strictement négatives sur I. | $\ln(-u(t)) + C$ |
| $\frac{u'(t)}{u(t)}$ où u ne s'annule pas sur I. | $\ln \mid u(t) \mid + C$ |
| $\frac{u'(t)}{u^2(t)}$ où u ne s'annule pas sur I. | $-\frac{1}{u(t)} + C$ |
| $\frac{u'(t)}{[u(t)]^n}$ où u ne s'annule pas sur I. | $-\frac{1}{(n-1)\,t^{n-1}}$ |
| $\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$ où u est à valeurs strictement positives sur I | $2\sqrt{u(t)} + C$ |
| $[u(t)]^{\alpha} \times u'(t)$ $\alpha \in \mathbb{R} - [-1\}$ | $\frac{[u(t)]^{\alpha}}{\alpha + 1} + C$ |
| $e^{u(t)} \times u'(t)$ | $e^{u(t)} + C$ |

**En sciences physiques,** on utilise les deux premiers résultats de ce tableau de la façon suivante:

une primitive de $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ est : $t \longmapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$

une primitive de $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ est : $t \longmapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$ .