1 Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$I = \int_1^e \frac{\ln t}{t}\, dt$	$J = \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$	$K = \int_0^1 \frac{x}{e^x}\, dx$
$L = \int_{-1}^1 (t+1)\cos(\pi t)\, dt$	$M = \int_0^1 x\, e^x\, dx$	$N = \int_1^2 (x^2+1)\ln 2x\, dx$
$P = \int_{-3}^0 (x+1)\, e^x\, dx$	$Q = \int_1^e x^2 \ln x\, dx$	$R = \int_0^{\pi/4} \text{Arctan}\, x\, dx$

2 Calculer à l'aide de deux intégrations par parties.

$I = \int_0^1 (x^2+3x)\, e^{-x}\, dx$	$J = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\, dx$	$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$

3 1° a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire le calcul de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$

2° a) Soit f la fonction définie pour tout nombre réel par $f(x) = \ln(1+e^x)$. Calculer la dérivée de f.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale: $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\, dx$

4 Une presse est constituée d'une enclume fixe et d'un marteau qui se déplace le long d'une tige verticale. La vitesse °V' du marteau est une fonction du temps t. Le temps t est exprimé en secondes et la vitesse V en mètres par seconde. La distance parcourue par le marteau entre l'instant de départ (t = 0) et l'instant t = T est : $d(T) = \int_0^T V(t)\, dt$ où $V(t) = 1 + (t-1)\, e^x$. En intégrant par parties prouver que $\int_0^T (t-1)\, e^{-t}\, dt$. En déduire d(T) en fonction de T.

CORRECTION

$\boxed{1}$ $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln t \text{ et } u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } v(t) = \ln t \end{array}\right\}$ donc $I = \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = [\ln t \times \ln t]_e^1 - \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt$

donc $\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt + \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = [\ln t \times \ln t]_e^1$ donc $2\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = \ln e \times \ln e - \ln 1 \times \ln 1$ donc $\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{2x} \text{ et } v(x) = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right\}$ donc $J = \int_0^1 x\, e^{2x}\,dx = \left[x \times \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{e^{2x}}{2}\,dx = 1 \times \frac{e^2}{2} - 0 \times \frac{e^0}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2} \times e^{2x}\,dx$

$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{2} \times \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^0}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$

$K = \int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx = \int_0^1 x\, e^{-x}\,dx.$ $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = \frac{e^{-x}}{-1} \end{array}\right\}$ donc $K = \left[x \times \frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{e^{-x}}{-1}\,dx$

$= 1 \times (-e^{-1}) - 0 \times e^0 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} + e^0\right) = \boxed{1 - \frac{2}{e}}$

$\left.\begin{array}{l} u(t) = t + 1 \text{ et } u'(t) = 1 \\ v'(t) = \cos(\pi t) \text{ et } v(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \end{array}\right\}$ donc $L = \int_{-1}^1 (t+1)\cos(\pi t)\,dt = \left[(t+1)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 \times \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\,dt$

$= (1+1)\frac{\sin \pi}{\pi} - (-1+1)\frac{\sin(-\pi)}{\pi} - \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \times \sin(\pi t)\,dt = -\left[\frac{1}{\pi} \times \frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi) - \frac{1}{\pi^2}\cos(-\pi) = \boxed{0}$

$\left.\begin{array}{l} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = ex \text{ et } v(x) = e^x \end{array}\right\}$ donc $M = \int_0^1 x\, e^x\,dx = [x\, e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x\,dx = 1 \times e - 0 \times e^0 - [e^x]_0^1 = e - (e - e^0) = \boxed{1}$

$\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln(2x) \text{ et } u'(x) = \frac{2}{2x} \\ v'(x) = x^2 + 1 \text{ et } v(x) = \frac{x^3}{3} + x \end{array}\right\}$ donc $N = \int_1^2 (x^2+1)\ln 2x\,dx = \left[\ln(2x) \times \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{2x}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)$

$= \ln 4 \times \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \ln 2 \times \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)dx = \frac{14}{3}\ln 4 - \frac{4}{3}\ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)dx$

$= \frac{14}{3} \times 2\ln 2 - \frac{4}{3} \times \ln 2 - \left[\frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = \left(\frac{28}{3} - \frac{4}{3}\right)\ln 2 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 1\right)\right) = \frac{24}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} - 2 + \frac{1}{9} + 1$

$= 8\ln 2 - \frac{7}{9} - 1 = \boxed{8\ln 2 - \frac{16}{9}}$

$\left.\begin{array}{l} u(x) = x + 1 \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{array}\right\}$ donc $P = \int_{-3}^0 (x+1)\,e^x\,dx = [(x+1)\,e^x]_{-3}^0 - \int_{-3}^0 1 \times e^x\,dx$

$= (0+1)\,e^0 - (-3+1)\,e^{-3} - [e^x]_{-3}^0 = 1 + \frac{2}{e^3} - (e^0 - e^{-3}) = 1 + \frac{2}{e^3} - 1 + \frac{1}{e^3} = \boxed{\frac{3}{e^3}}$

$\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\}$ donc $Q = \int_1^e x^2 \ln x\,dx = \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\,dx$

$= \ln e \times \frac{e^3}{3} - \ln 1 \times \frac{1}{3} - \int_1^e \frac{1}{3} \times x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{3e^3}{9} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}}$

$\left.\begin{array}{l} u(x) = \arctan(x) \text{ et } u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 \text{ et } v(x) = x \end{array}\right\}$ donc $R = \int_0^1 \text{Arctan}\, x\,dx = [x \times \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$. on a $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ qui admet comme primitive : $\ln |u| = \ln(x^2+1)$

$R = 1 \times \arctan 1 - 0 \times \arctan 0 - \left[\frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - (\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)) = \boxed{\frac{\pi}{4} - \ln 2}$

2 Calculer à l'aide de deux intégrations par parties.

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2 + 3x \text{ et } u'(x) = 2x + 3 \\ v'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = \dfrac{e^{-x}}{-1} \end{array}\right\} \text{donc } I = \int_0^1 (x^2 + 3x)\, e^{-x}\, dx = [(x^2 + 3x)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (2x + 3) \times (-e^{-x})\, dx$$

$$= -(1^2 + 3 \times 1)\, e^{-1} + (0^2 + 3 \times 0)\, e^0 + \int_0^1 (2x + 3)\, e^{-x}\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = 2x + 3 \text{ et } u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = \dfrac{e^{-x}}{-1} \end{array}\right\} \text{donc } \int_0^1 (2x + 3)\, e^{-x}\, dx = [(2x + 3)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 2 \times (-e^{-x})\, dx$$

$$= -(2 + 3)\, e^{-1} + (0 + 3)\, e^0 + 2\int_0^1 e^{-x}\, dx = -\frac{5}{e} + 3 + 2 \times [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{5}{e} + 3 + 2\left(-\frac{1}{e} + 1\right) = -\frac{7}{e} + 5$$

$$\text{Et } I = -(1^2 + 3 \times 1)\, e^{-1} + (0^2 + 3 \times 0)\, e^0 - \frac{7}{e} + 5 = -\frac{4}{e} - \frac{7}{e} + 5 = \boxed{-\frac{11}{e} + 5}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2 \text{ et } u'(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x \text{ et } v(x) = \sin x \end{array}\right\} \text{donc } J = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\, dx = [x^2 \sin x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin x\, dx$$

$$= \pi^2 \sin \pi - (-\pi)^2 \sin(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin x\, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin x\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = 2x \text{ et } u'(x) = 2 \\ v'(x) = \sin x \text{ et } v(x) = -\cos x \end{array}\right\} \text{donc } \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin x\, dx = [2x \times (-\cos x)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2 \times (-\cos x)\, dx$$

$$= [-2x \cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos x\, dx = -2\pi \cos \pi + 2 \times (-\pi) \cos(-\pi) + [2 \sin x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi + 2\pi + 2 \sin \pi - 2 \sin(-\pi) = 4\pi$$

$$\boxed{J = -\int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin x\, dx = -4\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = \cos x \text{ et } u'(x) = -\sin x \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{array}\right\} \text{donc } K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx = [\cos x \times e^x]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin x)\, e^x\, dx$$

$$= \cos(\pi/2) \times e^{pi/2} - \cos(-\pi/2)\, e^{-\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, e^x\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, e^x\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = \sin x \text{ et } u'(x) = \cos x \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{array}\right\} \text{donc } K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, e^x\, dx = [\sin x\, e^x]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$$

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx = [\sin x\, e^x]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx \text{ donc } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx = [\sin x e^x]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\text{donc } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\left(\sin(\pi/2) \times e^{\pi/2} - \sin(-\pi/2)\, e^{-\pi/2}\right) = \frac{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{2}$$

---

3 1° a) $e^x - \dfrac{e^x}{1 + e^x} = \dfrac{e^x(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{e^x + e^{2x} - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^x}$

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx = \int_0^1 \left(e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx = \int_0^1 e^x\, dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = [e^x]_0^1 - [\ln(1 + e^x)]_0^1$

Car si $u(x) = 1 + e^x$ alors $u'(x) = e^x$ et $\dfrac{e^x}{1 + e^x} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et admet comme primitive $\ln |u(x)| = \ln(1 + e^x)$

$I = e^1 - e^0 - (\ln(1 + e^1) - \ln(1 + e^0)) = \boxed{e - 1 - \ln(1 + e) + \ln 2}$

2° a) $f'(x) = \dfrac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ b) $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln(1 + e^x) \text{ et } u'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x} \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{array}\right\}$

$$\text{donc } J = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x)\, dx = [\ln(1 + e^x) \times e^x]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} \times e^x\, dx = \ln(1 + e^1) \times e^1 - \ln(1 + e^0) \times e^0 - I$$

$$= e \ln(1 + e) - \ln 2 - (e - 1 - \ln(1 + e) + \ln 2) = \boxed{1 - e - 2 \ln 2 + \ln(1 + e)(1 + e)}$$

---

4 $\left.\begin{array}{l} u(t) = t - 1 \text{ et } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} \text{ et } v(t) = \dfrac{e^{-t}}{-1} \end{array}\right\}$ donc $\displaystyle\int_0^T (t - 1)\, e^{-t}\, dt = [(t - 1)(-e^{-t})]_0^T - \int_0^T 1 \times (-e^{-t})\, dt$

$$= -(T - 1)\, e^{-T} + (0 - 1)\, e^0 + \int_0^T e^{-t}\, dt = (1 - T)\, e^{-T} - 1 + [-e^{-t}]_0^T = (1 - T)\, e^{-T} - 1 - e^{-T} + e^0 = -T e^{-T}$$

$$d(T) = \int_0^T (t - 1)\, e^{-t}\, dt = -T e^{-T}$$