Soit la fonction f définie sur] 1 ; + ∞ [par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1° a) Calculer $\lim\limits_{t \to 1} f(t)$ et en déduire une équation d'une asymptote D à la courbe C .

b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et en déduire qu'une droite Δ est asymptote à la courbe C .

c) Etablir le tableau de variation de f .

d) Tracer la courbe C et ses asymptotes.

2° Soit deux réels α et p tels que $1 < \alpha < e$ et $p>e$.

On pose $A_\alpha = \int_\alpha^e f(t)\,dt$ et $A_p = \int_e^p f(t)\,dt$.

a) Interpréter graphiquement ces deux intégrales.

b) Déterminer une primitive de f sur] 1 ; + ∞ [et calculer $A_{\sqrt{e}}$ et A_e .

3° Par définition, l'intégrale $\int_e^{+\infty} f(t)\,dt$ existe si, et seulement si, $\lim\limits_{p \to +\infty} A_p$ existe et est finie.
L'intégrale est alors égale à la limite trouvée.

a) Vérifier que cette intégrale existe et donner sa valeur.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

4° Par définition, $\int_1^e f(t)\,dt$ existe si, et seulement si, $\lim\limits_{\alpha \to 1} A_\alpha$ existe et est finie.

a) Cette intégrale existe-t-elle ?

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

Aire de la surface comprise entre deux courbes

1° Soit deux fonctions f et g dérivables sur [a ; b] telles que f ; g sur [a ; b] et leurs représentations graphiques C_f et C_g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note x les abscisses.

a) Faire un dessin en choisissant des fonctions f et g dont l'une au moins change de signe dans l'intervalle [a; b]. Colorier la surface S comprise entre C_f, C_g et les droites d'équations x = a et x = b .

b) Soit k un réel tel que, pour tout x de [a ; b] , on ait $f(x) + k \geq 0$ et $g(x) + k \geq 0$. Colorier la surface S' image de S par la translation de vecteur $k\vec{j}$. Pour la clarté de la figure, on choisira un nombre k suffsamment grand pour que l'intersection des surfaces S et S' soit vide.

c) Ecrire l'aire .A de la surface S' comme différence de deux intégrales. Puis en utilisant la linéarité de l'intégrale, montrer que $A = \int_a^b (f(t) - g(t))\,dt$

d) Expliquer pourquoi , A est également l'aire de la surface S.

2° On considère les fonctions f et g définies sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = 2\cos x$.

Soit C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

a) Expliquer pourquoi on a f > g sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) En utilisant le cercle trigonométrique, trouver un encadrement au plus juste de sin x et cos x sur $\left[\pi , \dfrac{3\pi}{4}\right]$. En déduire que f > g sur cet intervalle.

c) Dessiner C_f et C_g et colorier la surface S comprise entre C_f , C_g , et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

d) En utilisant le résultat démontré à la question 1., calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface S.