

EXERCICE 1 Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x , par $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$.

1° a) Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

b) Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2° En utilisant les résultats de la question 1° c) résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

a) $4 \ln^3 x - 8 \ln^2 x - \ln x + 2 = 0$

b) $4e^{2x} - 8e^x - 1 + \frac{2}{e^x} = 0$.

PROBLEME Partie A Etude du signe de $x^3 - 1 + 2 \ln(x)$

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln(x)$ ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x .)

1° Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2° Dresser le tableau de variation de la fonction g . (Les limites ne sont pas demandées.)

3° Calculer $g(1)$.

4° Dédire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1° a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C . Y a-t-il une autre asymptote à C ? Si oui, donner son équation.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

d) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .

e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote D et la courbe C . Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D .

f) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C , et la droite D .

2° a) Montrer que la fonction H définie par : $H(x) = -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$ est une primitive de la fonction h définie sur

$\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

b) Soit Δ le domaine plan limité par D , C et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$. Hachurer Δ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2 , de Δ puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.