Devoir Commun de Mathématiques - Classes de première S - Lycée Saint-Exupéry

Vendredi 18 mars 2011 -- Durée : 3 h.

La clarté du raisonnement et de la rédaction comptera pour une part importante dans la note finale.

Exercice 1

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Sur la figure donnée en annexe, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

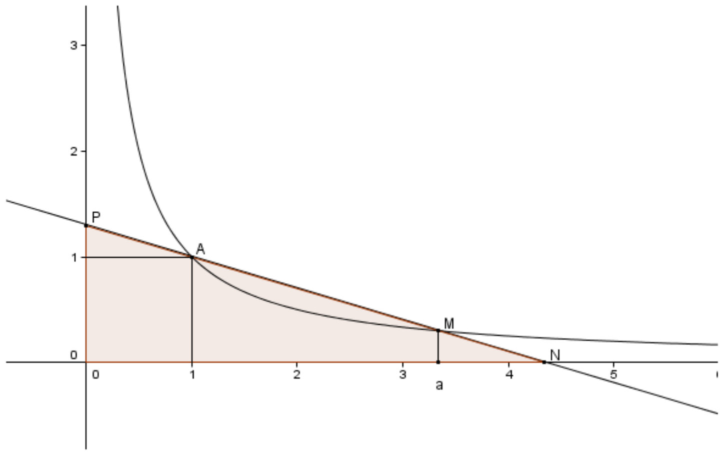
1° Sur la même figure tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

2° Calculer les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
On désignera par A celui dont l'abscisse est négative.

3° Soit m un réel, on note (D) la droite de coefficient directeur m passant par A.
a) Déterminer une équation de la droite (D)
b) Montrer que la droite (D) et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont deux points d'intersection (distincts ou non) : A et M_1, et déterminer en fonction de m les coordonnées de M_1
Vérifier que (D) et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection (distincts ou non) : A et le point M_2 de coordonnées $\left(\frac{-m+1}{2} ; \frac{-m^2+5m}{2}\right)$.
c) Déterminer m pour que A soit le milieu de $[M_1M_2]$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.
On considère le point A de coordonnées A (1 ; 1) et M un point mobile sur la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Si $a \neq 1$, la droite (AM) coupe l'axe des abscisses en un point N et l'axe des ordonnées en un point P.
Si $a = 1$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A coupe l'axe des abscisses en un point N et l'axe des ordonnées en un point P.
Dans tous les cas, on note $g(x)$ l'aire du triangle ONP.



1° On se place dans le cas où $a \neq 1$.
a) Justifier que la droite (AM) a pour équation
$y = -\frac{x}{a} + \frac{a+1}{a}$
b) Calculer l'abscisse x_N de N en fonction de a.
c) Calculer l'ordonnée y_P de P en fonction de a.
En déduire $g(x)$.

2° On se place maintenant dans le cas où $a = 1$.
a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
b) En déduire x_N et y_P.
c) En déduire $g(1)$.

3° Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x}$.
Etudier les variations de la fonction h sur $]0 ; +\infty[$ (on pourra donner le tableau de variation).

4° On admet que dans tous les cas ($a \neq 1$ ou $a \neq 1$) l'aire du triangle ONP est donnée par

$$g(a) = \frac{1}{2}a + 1 + \frac{1}{2a} = h(a).$$

Déterminer a pour que $g(a)$ soit minimal.
En déduire la position du point M pour que l'aire du triangle ONP soit minimale.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

1° Sur la figure donnée en annexe, construire, en justifiant brièvement, le point D barycentre de {(A. 1), (B.2)}, le point E barycentre de {(A, 1), (C, 3)} et le point F barycentre de {(B, 2), (C, – 3)}.

2° M étant un point quelconque du plan

a) Simplifier $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MC}$, $2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$

b) En déduire la valeur de $4\,\overrightarrow{ME} - 3\,\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MF}$

c) Montrer que les points D, E et F sont alignés.

3° Soit I le barycentre de {(A, 1), (B, – 2), (C, 3)}.
Montrer que I est le point d'intersection des droites (BE) et (AF).

4° Soit J le point d'intersection des droites (CD) et (BE).
Déterminer les réels *a*, *b*, et *c* tels que J soit le barycentre de {(A, *a*), (B, *b*), (C, *c*)}.

5° *Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera* ***sur sa copie*** *le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point . (Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à* 0

Question 1 L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\| \overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC} \| = \| 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \|$ est :

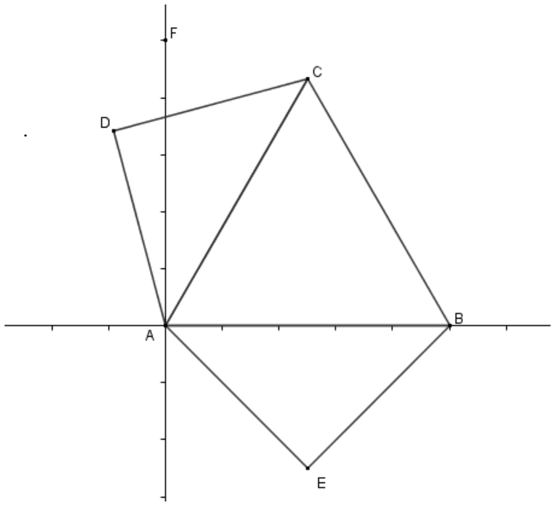
A	la droite (IA)	B	Le cercle de centre I qui passe par A	C	Le cercle de centre F qui passe par I	D	La médiatrice de [IF]

Question 2 L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\| \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} \| = 3\,\| 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} \|$ est :

A	la droite (DF)	B	Le cercle de centre F qui passe par D	C	Le cercle de centre D qui passe par F	D	La médiatrice de [DF]

Exercice 4

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral direct. ACD et AEB sont deux triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en D et E. L'objectif de l'exercice est de prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles en utilisant deux méthodes différentes.



Questions préliminaires

Donner, en justifiant, la mesure principale des angles orientés suivants:

a) $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

Partie A : première méthode

1° Déterminer, à l'aide de la relation de Chasles, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

2° a) Quelle est la nature du triangle AED

b) En déduire la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AED}$ puis la mesure principale en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})$.

3° En utilisant la relation de Chasles, calculer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED})$. Que peut-on en déduire ?

Partie B deuxième méthode

On se place dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$.

1° Lire les coordonnées cartésiennes de B.
Donner des coordonnées polaires de C, puis calculer les coordonnées cartésiennes de C.

2° Calculer la longueur AE. En déduire les coordonnées polaires de E, puis de D.

3° Calculer les coordonnées cartésiennes de E.

4° On admet que $\cos\left(\frac{7\,\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\,\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

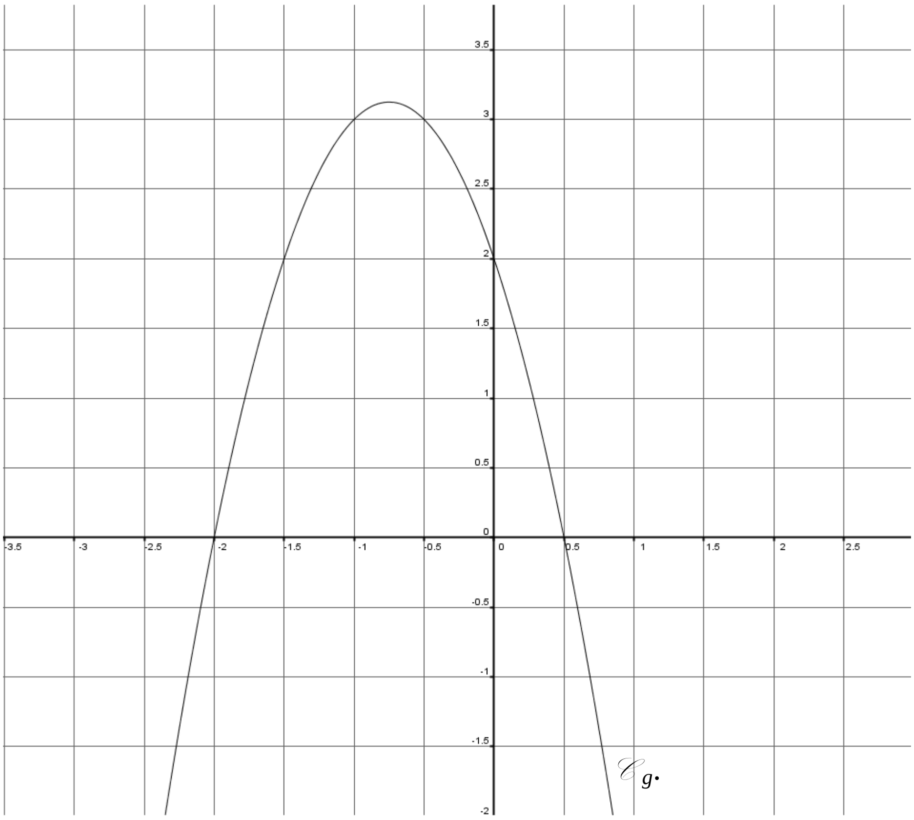
En déduire les coordonnées cartésiennes du point D.

5° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$, puis montrer que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

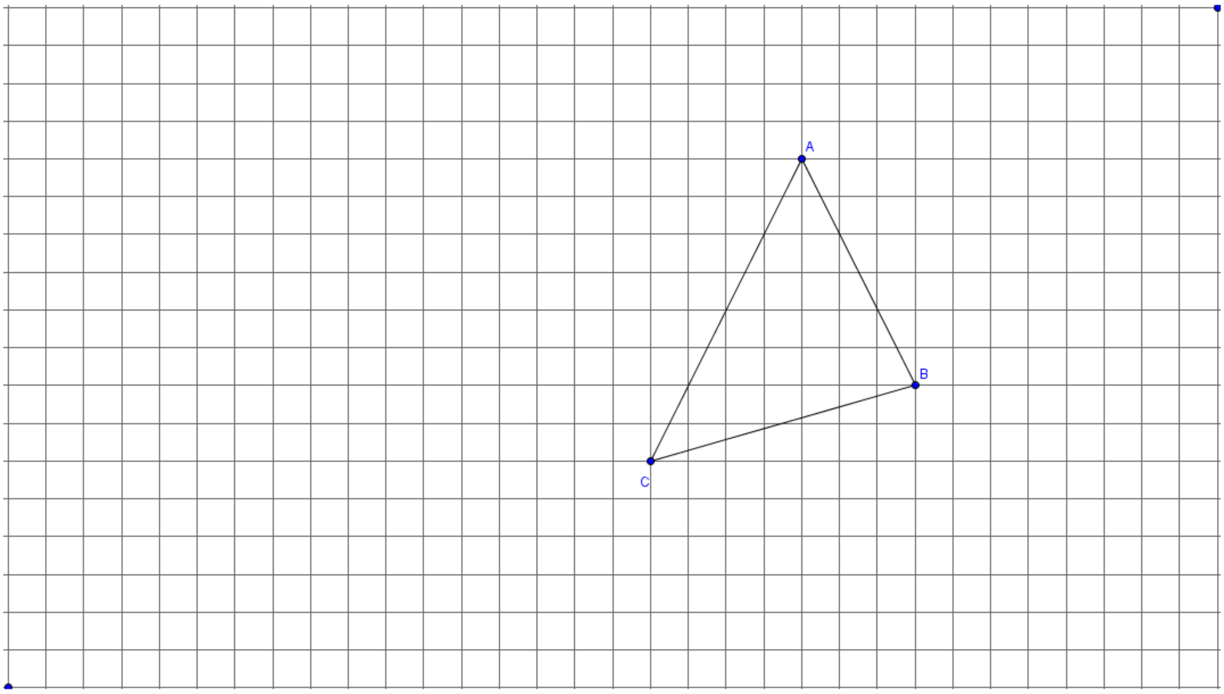
Annexe à rendre avec la copie

Nom____

Exercice 1



Exercice 2



Exercice 1 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Dans un repère orthonormé repère on donne les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions
2° Calculer les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On désignera par A celui dont l'abscisse est négative.

Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x = -2x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$

Equation du second degré : $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$.

Les racines sont donc $x_1 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-5-7}{6} = -2$. De plus $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{9}$ et $f(-2) = 0$

Les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont donc pour coordonnées A $(-2\,;0)$ et B $\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{7}{9}\right)$

3° Soit m un réel, on note (D) la droite de coefficient directeur m passant par A.
a) Déterminer une équation de la droite (D)

La droite de coefficient directeur m passant par A a une équation de la forme $y = mx + p$

$A \in (D) \Leftrightarrow y_A = m\,x_A + p \Leftrightarrow 0 = -2m + p \Leftrightarrow p = 2m$.

(D) a donc pour équation $y = mx + 2m$.

b) Montrer que la droite (D) et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont deux points d'intersection (distincts ou non) : A et M_1, et déterminer en fonction de m les coordonnées de M_1

Si M est à l'intersection de la droite (D) avec la courbe $\mathscr{C}_f$ son abscisse est solution de l'équation $f(x) = mx + 2m$.

$f(x) = mx + 2m \Leftrightarrow x^2 + 2x = mx + 2m \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x - 2m = 0$

Equation du second degré : $x^2 + (2-m)x - 2m = 0$

$\Delta = (2-m)^2 - 4 \times (-2m) = 4 - 4m + m^2 + 8m = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$

Les racines de $x^2 + (2-m)x - 2m$ sont donc :

$x_1 = \dfrac{-(2-m)+(m+2)}{2} = \dfrac{-2+m+m+2}{2} = m$ et $x_2 = \dfrac{-2+m-m-2}{2} = -2$.

$M_1 \neq A$ donc $M_1\,(m\,;m^2 + 2m)$

Vérifier que (D) et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection (distincts ou non) : A et le point M_2 de coordonnées $\left(\dfrac{-m+1}{2}\,;\dfrac{-m^2+5m}{2}\right)$.

Si M est à l'intersection de la droite (D) avec la courbe $\mathscr{C}_g$ son abscisse est solution de l'équation $g(x) = mx + 2m$.

$g(x) = mx + 2m \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 2 = mx + 2m \Leftrightarrow -2x^2 + (-3-m)x + 2 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + (m+3)x + 2m - 2 = 0$

Equation du second degré : $2x^2 + (m+3)x + 2m - 2 = 0$

$\Delta = (m+3)^2 - 4 \times 2 \times (2m-2) = m^2 + 6m + 9 - 16m + 16 = m^2 - 10m + 25 = (m-5)^2$

Les racines de $2x^2 + (m+3)x + 2m - 2 = 0$ sont donc :

$x_1 = \dfrac{-(m+3)-(m-5)}{4} = \dfrac{-m-3-m+5}{4} = \dfrac{-2m+2}{4} = \dfrac{-m+1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(m+3)+(m-5)}{4} = \dfrac{-m-3+m-5}{4} = -2$

$M_2 \neq A$ donc $M_2\left(\dfrac{-m+1}{2}\,;m \times \dfrac{-m+1}{2} + m\right)$ c'est à dire $M_2\left(\dfrac{-m+1}{2}\,;\dfrac{-m^2+5m}{2}\right)$

Remarque A appartient à l'intersection de (D) et de $\mathscr{C}_f$ donc -2 est solution de l'équation $x^2 + (2-m)x - 2m = 0$

Donc : $x^2 + (2-m)x - 2m = (x+2)(x-m)$ et $x_{M_1} = m$.

A appartient à l'intersection de (D) et de $\mathscr{C}_g$ donc -2 est solution de l'équation $2x^2 + (m+3)x + 2m - 2 = 0$

Donc : $2x^2 + (m+3)x + 2m - 2 = (x+2)(2x+m-1)$ et $x_{M_2} = \dfrac{-m+1}{2}$

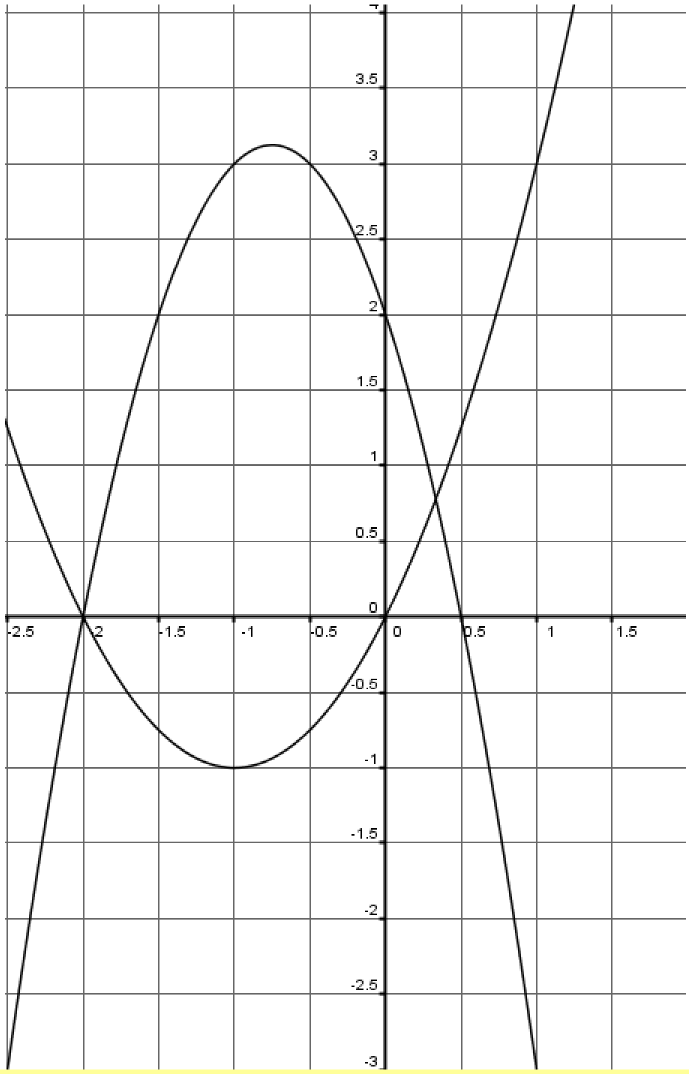
b) Déterminer m pour que A soit le milieu de $[M_1M_2]$

A est le milieu de $[M_1M_2]$ si, et seulement si, $-2 = \dfrac{m + \dfrac{-m+1}{2}}{2}$ et $0 = m^2 + m + \dfrac{-m^2+5m}{2}$

$-2 = \dfrac{m + \dfrac{-m+1}{2}}{2} \Leftrightarrow -4 = \dfrac{2m - m + 1}{2} \Leftrightarrow -8 = m + 1 \Leftrightarrow m = -9$

$0 = m^2 + 2m + \dfrac{-m^2+5m}{2} \Leftrightarrow 0 = 2m^2 + 4m - m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 9m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = -9$.

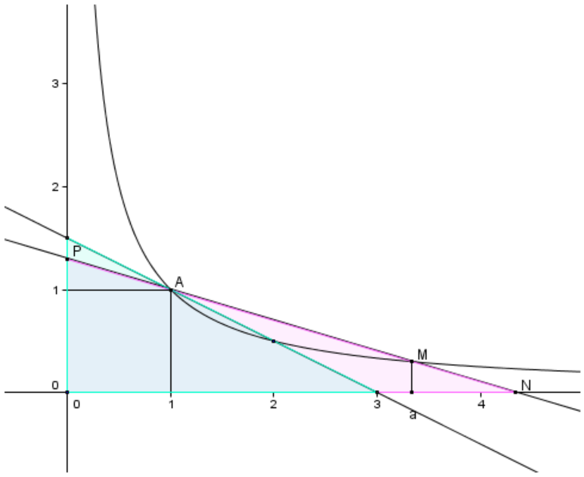
Donc A est le milieu de $[M_1M_2]$ si, et seulement si, $m = -9$.



Exercice 2 Soit f la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan. On considère le point A de coordonnées A (1 ; 1) et M un point mobile sur la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a. Si $a \neq 1$, la droite (AM) coupe l'axe des abscisses en un point N et l'axe des ordonnées en un point P. Si $a = 1$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A coupe l'axe des abscisses en un point N et l'axe des ordonnées en un point P. Dans tous les cas, on note $g(x)$ l'aire du triangle ONP. 1° On se place dans le cas où $a \neq 1$. a) Justifier que la droite (AM) a pour équation $y = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{a+1}{a}$

$-\dfrac{x_A}{a} + \dfrac{a+1}{a} = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{a+1}{a} = \dfrac{a}{a} = 1 = y_A$ donc A vérifie l'équation.

$-\dfrac{x_M}{a} + \dfrac{a+1}{a} = -\dfrac{a}{a} + \dfrac{a+1}{a} = \dfrac{1}{a} = y_M$ donc M vérifient aussi l'équation.



b) Calculer l'abscisse x_N de N en fonction de a.

x_N vérifie l'équation $-\dfrac{x_N}{a} + \dfrac{a+1}{a} = 0$ donc $x_N = a + 1$.

c) Calculer l'ordonnée y_P de P en fonction de a. En déduire $g(x)$.

$y_P = -\dfrac{0}{a} + \dfrac{a+1}{a} = \dfrac{a+1}{a}$

$a > 0$ donc OP $= | y_P | = \dfrac{a+1}{a}$ et ON $= | x_N | = a + 1$

OPN est rectangle en O donc $g(a) = \dfrac{1}{2} \times \text{OP} \times \text{ON} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a+1}{a} \times (a+1)$

$= \dfrac{(a+1)^2}{2a} = \dfrac{a^2 + 2a + 1}{2a} = \dfrac{1}{2} a + 1 + \dfrac{1}{2a}$

2° On se place maintenant dans le cas où $a = 1$. a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Une équation de la tangente en M est donc : $y = f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 1 - (x - a) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

b) En déduire x_N et y_P.

x_N vérifie l'équation $-x_N + 2 = 0 \Leftrightarrow -x_N = 2$ et $y_P = 2$

c) En déduire $g(1)$.

OP $= | y_P | = 2$ et ON $= | x_N | = 2$. OPN est rectangle en O donc $g(1) = \frac{1}{2} \times$ ON $\times$ OP $= 2$.

3° Soit h la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $h(x) = \frac{1}{2} x + 1 + \frac{1}{2x}$.
Etudier les variations de la fonction h sur] 0 ; + ∞ [(on pourra donner le tableau de variation).

h est une fonction rationnelle elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel $x > 0$,

$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$

$= \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$	‖	–	0	+	
x^2	‖	+		+	
$h'(x)$	‖	–	0	+	

x	0		1	
signe de $h'(x)$	‖	–	0	+
Variation de h	‖	↘	2	↗

4° On admet que dans tous les cas ($a = 1$ ou $a \neq 1$) l'aire du triangle ONP est donnée par $g(a) = \frac{1}{2} a + 1 + \frac{1}{2a} = h(a)$
a) Déterminer a pour que $g(a)$ soit minimal. En déduire la position du point M pour que l'aire du triangle ONP soit minimale.

D'après les variations de h, $g(a)$ est minimal pour $a = 1$. On a alors M = A et la droite (NP) est alors tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 3 Soit ABC un triangle. 1° Construire le point D barycentre de {(A. 1), (B.2)}, le point E barycentre de {(A, 1), (C, 3)} et le point F barycentre de {(B, 2), (C, – 3)}.

$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{-3}{-1}\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$

2° M étant un point quelconque du plan a) Simplifier $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}$, $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (1 + 2)\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = (1 + 3)\overrightarrow{ME} = 4\overrightarrow{ME}$ et $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = (2 - 3)\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MF}$

b) En déduire la valeur de $4\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MF}$

$4\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} - (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

c) Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Pour tout point M, $4\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MF} = \vec{0}$ donc, pour M = E on a : $-3\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les points E, D et F sont alignés.

3° Soit I le barycentre de {(A, 1), (B, – 2), (C, 3)} Montrer que I est le point d'intersection des droites (BE) et (AF)

I barycentre de {(A, 1), (B, – 2), (C, 3)} et E barycentre de {(A, 1), (C, 3)} donc, par associativité, I est le barycentre de {(B, – 2), (E, 1 + 3)} donc I appartient à la droite (EB)

I barycentre de {(A, 1), (B, – 2), (C, 3)} et F barycentre de {(B, – 2), (C, 3)} donc, par associativité, I est le barycentre de {(A, 1), (F, – 2 + 3)} donc I appartient à la droite (AF).

4° Soit J le point d'intersection des droites (CD) et (BE)
Déterminer les réels *a*, *b*, et *c* tels que J soit le barycentre de {(A, *a*), (B, *b*), (C, *c*)}

$1 + 2 + 3 \neq 0$ Le barycentre de {(A, 1), (B, 2), (C, 3)} est aussi, par associativité, le barycentre de {(D, 1 + 2), (C, 3)} donc il appartient à la droite (CD).

Par associativité c'est aussi le barycentre {(B, 2), (F, 1 + 3)} il appartient donc aussi à la droite (BF)

Le barycentre de {(A, 1), (B, 2), (C, 3)} est donc le point d'intersection des droites (CD) et (BF) c'est donc le point J.

5° *Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

Question 1 L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\|$ est :

A	la droite (IA)	**B**	Le cercle de centre I qui passe par A	C	Le cercle de centre F qui passe par I	D	La médiatrice de [IF]

I barycentre de {(A, 1), (B, – 2), (C, 3)} donc, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (1 - 2 + 3)\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MI}$

On a vu que $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MF}$ donc $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{FA}$

$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\| \Leftrightarrow 2\text{MI} = \text{FA} \Leftrightarrow \text{MI} = \frac{\text{FA}}{2}$

On obtient donc un cercle de centre I.

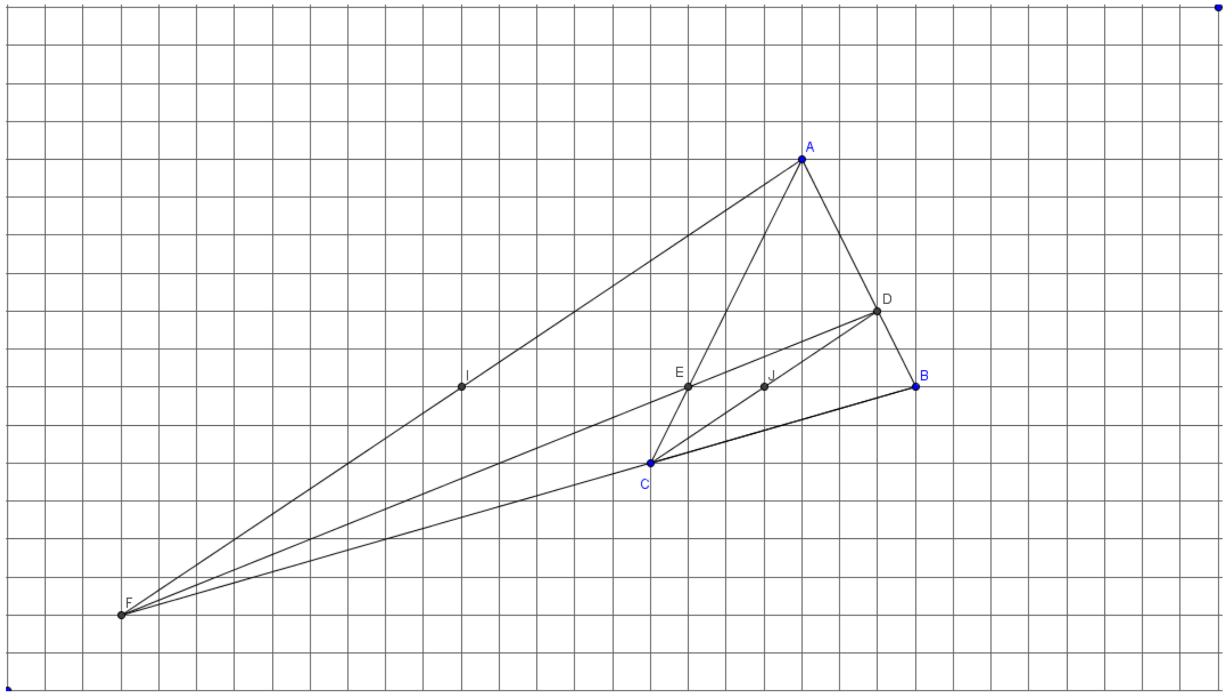
$\|\overrightarrow{AA} - 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\| = \|2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA}\|$ donc le cercle passe par A.

Question 2 L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 3\|2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|$ est :

A	la droite (DF)	B	Le cercle de centre F qui passe par D	C	Le cercle de centre D qui passe par F	**D**	La médiatrice de [DF]

On a vu que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MF}$

$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 3\|2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD}\| = 3\|-\overrightarrow{MF}\| \Leftrightarrow 3\text{MD} = 3\text{MF} \Leftrightarrow \text{MD} = \text{MF}$



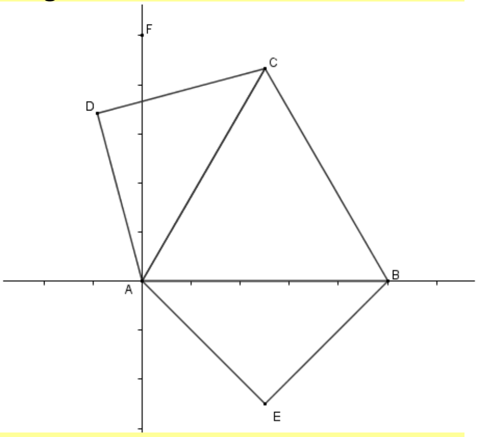
Exercice 3 Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral direct. ACD et AEB sont deux triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en D et E. L'objectif de l'exercice est de prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles en utilisant deux méthodes différentes. Questions préliminaires Donner, en justifiant, la mesure principale des angles orientés suivants:

a) AEB est un triangle rectangle isocèle direct en E donc $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{4}$

b) ABC est un triangle équilatéral direct donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$

c) ACD est un triangle rectangle isocèle direct en D donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{4}$

parallèles en utilisant deux méthodes différentes.



Partie A : première méthode 1° Déterminer, à l'aide de la relation de Chasles, une mesure de

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6}$

2° a) Quelle est la nature du triangle AED

$\begin{cases} \text{AEB est un triangle rectangle isocèle en E donc AE}\sqrt{2} = \text{AB} \\ \text{ABC est un triangle équilatéral donc AB = AC} \\ \text{ACD est un triangle rectangle isocèle en D donc AC}\sqrt{2} = \text{AD} \end{cases}$ donc AE = AD donc AED est isocèle en A.

b) En déduire la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AED}$ puis la mesure principale en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})$.

AED est isocèle en A donc $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \dfrac{\pi - \dfrac{5\pi}{6}}{2} = \dfrac{\pi}{12}$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}) = -\dfrac{\pi}{12}$

3° En utilisant la relation de Chasles, calculer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED})$. Que peut-on en déduire ?

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}) = \dfrac{\pi}{3} + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{4\pi - 3\pi - \pi}{12} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont donc colinéaires de même sens et les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Partie B deuxième méthode On se place dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$. 1° Lire les coordonnées cartésiennes de B.

B (1 ; 0).

Donner des coordonnées polaires de C, puis calculer les coordonnées cartésiennes de C.

AC = 1 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$ donc C$\left[1 ; \dfrac{\pi}{3}\right]$. De plus $x_C = 1 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y_C = 1 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc C$\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2° Calculer la longueur AE. En déduire les coordonnées polaires de E, puis de D.

AEB est un triangle rectangle isocèle en E donc AE = $\dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = -\dfrac{\pi}{4}$ donc E$\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; -\dfrac{\pi}{4}\right]$

$AD = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}$ donc $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; \dfrac{7\pi}{12}\right]$

3° Calculer les coordonnées cartésiennes de E.

$x_E = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_E = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ donc $E\left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$

4° On admet que $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ En déduire les coordonnées cartésiennes du point D.

$x_D = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ et $y_D = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

donc $D\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4} ; \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$

5° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$, puis montrer que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

$\overrightarrow{BC}\left(\dfrac{1}{2} - 1 ; \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)$ donc $\overrightarrow{BC}\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{ED}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{ED}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{4} ; \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$

$-\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{-3-\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{8} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et les droites (BC) et (ED) sont parallèles.