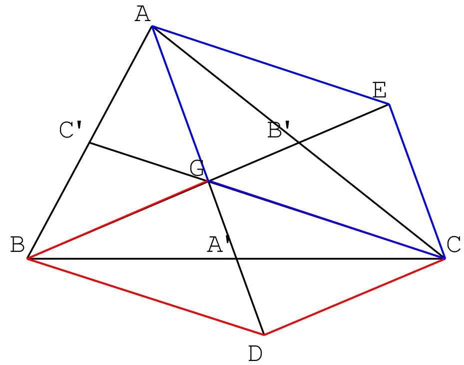
Centre de gravité, orthocentre, droite d'Euler



Soit ABC un triangle et G le centre de gravité du triangle .
Soient A' ,B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB]
1° a) Construire le point D défini par : $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.
Que peut-on dire du quadrilatère GBDC ?
Démontrer que les points A, G, A' et D sont alignés.
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GA}$?
b) Construire le point E, symétrique de G par rapport à B'.
Démontrer que le quadrilatère EDBA est un parallélogramme.
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GB}$
c) En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2° On a démontrer que le centre de gravité G du triangle ABC vérifie : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
On veut démontrer que si M est un point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ alors M est le centre de gravité du triangle ABC.
Soit M un point tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
a) Démontrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\,\overrightarrow{GM}$.
b) Conclure
3° On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
a) Construire le point H tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
b) Démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$
c) En déduire que, dans le triangle ABC, H est sur la hauteur issue de A
d) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC
4° a) Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$
b) En déduire que les points O, H et G sont alignés.
La droite qui passe par les points G, O et H s'appelle la droite d'Euler du triangle ABC

$\boxed{1}$ Calculer la longueur de chacun des côtés d'un rectangle de périmètre 221 m et d'aire 2 226 m².

$\boxed{2}$ Soit f la fonction définie sur R, par $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Donner le nom du type de courbe qu'est $\mathscr{C}_f$
Donner les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}_f$
Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$
Donner les coordonnées des points d'intersections, s'ils existent, de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses
Donner le tableau de variation de f, puis donner une représentation graphique de f.
Graphiquement, donner les solutions de l'équation $f(x) = 3$.
Retrouver le résultat précédent par le calcul.

$\boxed{3}$ m est un réel donné et f la fonction trinôme définie par $f(x) = x^2 + 2mx + 2m + 1$

1° Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule racine. calculer alors cette racine
2° Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ admet-elle 2 comme solution.
3° Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ admet-elle deux racines x_1 et x_2
4° Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant $x_1 - 2x_2 = 0$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On prendra 1 cm pour une unité.

$\boxed{4}$ Résoudre les inéquations suivantes

1° $\dfrac{-3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4} \geq 0$ 2° $\dfrac{2x + 1}{x^2 + 1} \leq 1$ 3° $-6x^3 + 13x^2 - 9x + 2 < 0$
On remarquera que 1 est racine évidente

$\boxed{5}$ Résoudre les équations suivantes

1° $\sqrt{2x - 4} = x + 1$ 2° $\sqrt{2x - 1} = x - 2$ 3° $3x^3 + x^2 - x + 1 = 0$
On remarquera que – 1 est racine évidente

$\boxed{6}$ A tout nombre m, on peut associer une parabole $\mathscr{P}_m$ d'équation : $y = x^2 - 2mx + 2 - m$.

1° Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la parabole $\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point.
2° a) Donner, en fonction de m, les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}_m$.
b) En déduire les valeurs de m telles que $\mathscr{P}_m$ admette un sommet d'ordonnée – 5.

1 Calculer la longueur de chacun des côtés d'un rectangle de périmètre 221 m et d'aire 2 226 m².

On note x la longueur et y la largeur de ce rectangle. (avec $x \leq y$)

(x, y) est solution du système $\begin{cases} 2x + 2y = 221 \\ xy = 2\,226 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 221 \\ xy = 2\,226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{221 - 2x}{2} \\ x \times \dfrac{221 - 2x}{2} = 2\,226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{221 - 2x}{2} \\ 2x^2 - 221x + 4\,452 = 0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation $2x^2 - 221x + 4\,452 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 221^2 - 4 \times 2 \times 4\,452 = 13\,225 = (115)^2$

L'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{221 - 115}{4} = \dfrac{53}{2}$ et $x_2 = \dfrac{221 + 115}{4} = 168$

On a donc $\begin{cases} 2x + 2y = 221 \\ xy = 2\,226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{53}{2} \\ y = \dfrac{221 - 2 \times \frac{53}{2}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 168 \\ y = \dfrac{221 - 2 \times 168}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{53}{2} \\ y = 168 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 168 \\ y = \dfrac{53}{2} \end{cases}$

Le rectangle a donc 168 m de longueur et 26,5 m de largeur.

2 Soit f la fonction définie sur R, par $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Donner le nom du type de courbe qu'est $\mathscr{C}_f$

$\mathscr{C}_f$ est une parabole

Donner les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}_f$

L'abscisse du sommet est : $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3}$. L'ordonnée est : $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{4}{3}$

Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{1}{3}$ comme axe de symétrie.

Donner les coordonnées des points d'intersections, s'ils existent, de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses

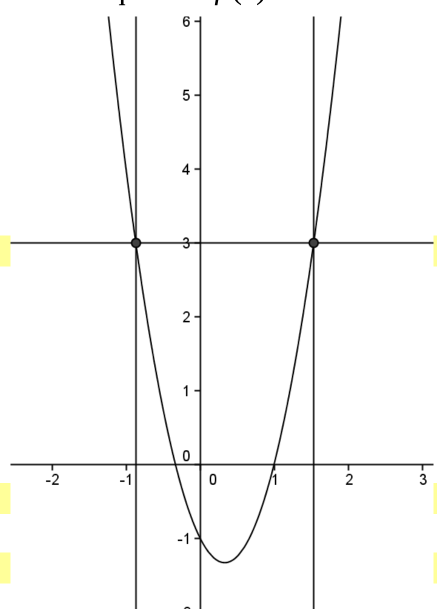
Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Résolution de l'équation $3x^2 - 2x - 1 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{2 - 4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2 + 4}{6} = 1$.

L'axe des abscisse coupe donc $\mathscr{C}_f$ en deux points A $\left(-\dfrac{1}{3} ; 0\right)$ et B $(1 ; 0)$



Donner le tableau de variation de f, puis donner une représentation graphique de f.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Variation de f	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

car $a = 1$ donc $a > 0$

Graphiquement, donner les solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Les solutions sont : $\alpha \approx -0{,}9$ et $\beta \approx 1{,}5$

Retrouver le résultat précédent par le calcul.

$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 0$

Résolution de l'équation $3x^2 - 2x - 4 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times (-4) = 4 \times 13$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{2 + 2\sqrt{13}}{6} = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{3} \approx 1{,}54$ et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{3} \approx -0{,}87$

L'équation $f(x) = 3$ a donc deux solutions : $S = \left\{ \dfrac{1 + \sqrt{13}}{3} ; \dfrac{1 - \sqrt{13}}{3} \right\}$

$\boxed{3}$ ***m* est un réel donné et *f* la fonction trinôme définie par $f(x) = x^2 + 2mx + 2m + 1$**

1° Pour quelle(s) valeur(s) de *m* l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule racine. calculer alors cette racine

$a = 1$ donc on a bien une équation du second degré avec $a = 1$, $b = 2m$ et $c = 2m + 1$.
L'équation du second degré " $f(x) = 0$ " n'a qu'une solution si, et seulement si, son discriminant est nul.
On calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = (2m)^2 - 4 \times 1 \times (2m + 1) = 4m^2 - 4(2m + 1) = 4m^2 - 8m - 4$.
Le(s) valeur(s) de m telle(s) que l'équation $f(x) = 0$ n'admette qu'une solution sont donc les solutions de l'équation,d'inconnue m, $4m^2 - 8m - 4 = 0$.
Résolution de l'équation : $4m^2 - 8m - 4 = 0$
Calcul du discriminant de cette nouvelle équation : $\delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 64 + 64 = 2 \times 8^2$

$\delta > 0$ donc l'équation " $4m^2 - 8m - 4 = 0$ "a deux solutions $m_1 = \dfrac{8 + 8\sqrt{2}}{8} = 1 + \sqrt{2}$ et $m_2 = 1 - \sqrt{2}$

Conclusion : l'équation " $f(x) = 0$ " n'admet qu'une solution si, et seulement si, $m = 1 + \sqrt{2}$ ou $m = 1 - \sqrt{2}$

Si $m = 1 + \sqrt{2}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2m}{2} = -1 - \sqrt{2}$

Si $m = 1 - \sqrt{2}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2m}{2} = -1 + \sqrt{2}$

2° Pour quelle(s) valeur(s) de *m* l'équation $f(x) = 0$ admet-elle 2 comme solution.

L'équation $f(x) = 0$ admet 2 comme solution si, et seulement si, $f(2) = 0$.

$f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 2m \times 2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet 2 comme solution si, et seulement si, $m = \dfrac{5}{2}$

3° Pour quelle(s) valeur(s) de *m* l'équation $f(x) = 0$ admet-elle deux racines x_1 et x_2

L'équation du second degré " $f(x) = 0$ " admet deux racines x_1 et x_2 si, et seulement si, son discriminet est strictement positif.
On a vu que le discriminant de cette équation est $4m^2 - 8m - 4 = 4(m^2 - 2m - 1)$
On a vu que l'équation, d'inconnue m, du second degré "$4m^2 - 8m - 4 = 0$ " admet deux solutions $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$
$a = 4$ donc $a > 0$ donc $4m^2 - 8m - 4$ est négatif entre $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ et positif à l'extérieur de $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$
Donc $4m^2 - 8m - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in]\, 1 + \sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2}\, [$
Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 si, et seulement si, $m \in]-\infty ; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2} ; +\infty[$

4° Pour quelle(s) valeur(s) de *m* l'équation $f(x) = 0$ admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant $x_1 - 2x_2 = 0$.

Pour que l'équation ait deux solutions on doit avoir $m \in]-\infty ; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2} ; +\infty[$
L'équation $f(x) = x^2 + 2mx + 2m + 1$ a deux solutions

$x_1 = \dfrac{-2m + 2\sqrt{m^2 - 2m - 1}}{2} = -m + \sqrt{m^2 - 2m - 1}$ et $x_2 = -m - \sqrt{m^2 - 2m - 1}$

$x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow -m + \sqrt{m^2 - 2m - 1} - 2(-m - \sqrt{m^2 - 2m - 1}) = 0$
$\Leftrightarrow -m + \sqrt{m^2 - 2m - 1} + 2m + 2\sqrt{m^2 - 2m - 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m - 1} = -m$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 = m^2$ et $-m > 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ et $-m > 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (Remarque $-\dfrac{1}{2} \in]-\infty ; 1 - \sqrt{2}[$)

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux racines x_1 et x_2 vérifiant $x_1 - 2x_2 = 0$ si, et seulement si, $m = -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$ **Résoudre les inéquations suivantes 1° $\dfrac{-3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4} \geq 0$**

Valeurs interdites : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
Etude du signe de $-3x^2 + 2x - 3$
Calcul des racines : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 4 - 4 \times 9$. $\Delta < 0$ donc le trinôme $-3x^2 + 2x - 3$ est toujours du signe de $a = -3$ donc toujours strictement négatif.
Etude du signe de $x^2 - 4$: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
Le trinôme $x^2 - 4$ est donc du signe de $a = 1$ à l'extérieur de -2 et 2 et du signe contraire entre -2 et 2

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-3x^2+2x-1$		$-$		$-$		$-$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-3x^2+2x-1}{x^2-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc S = $]-2\,;\,2[$

2° $\dfrac{2x+1}{x^2+1} \leq 1$

Valeurs interdites : $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$. Il n'y a donc pas de valeur interdite.

$\dfrac{2x+1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x^2+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1-(x^2+1)}{x^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1-x^2-1}{x^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-x^2}{x^2+1} \leq 0.$

Etude du signe de $2x-x^2 = x(2-x)$.

$2x-x^2$ est donc du signe de $a=-1$ à l'extérieur de 0 et 2 et du signe contraire entre 0 et 2

Etude du signe de x^2+1.

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x-x^2}{x^2+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

S = $]-\infty\,;\,0] \cup [2\,;\,+\infty[$

3° $-6x^3+13x^2-9x+2<0$ On remarquera que 1 est racine évidente

$P(x) = -6x^3+13x^2-9x+2$

$P(1) = -6\times 1 + 13\times 1 - 9\times 1 + 2 = 0$ donc $P(x)$ peut être factorisé par $x-1$

On cherche donc trois réels a, b et c tel que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{aligned}-6x^3+13x^2-9x+2 &= (x-1)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)-c\end{aligned}$$

Par identification il suffit de prendre a, b et c solutions du système $\begin{cases} a=-6\\ b-a=13\\ c-b=-9\\ -c=2\end{cases}$

$$\begin{cases} a=-6\\ b-a=13\\ c-b=-9\\ -c=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6\\ b=13-6\\ b=9-2\\ c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6\\ b=7\\ c=-2\end{cases}$$

On a donc, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(-6x^2+7x-2)$

Etude du signe de $-6x^2+7x-2$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 49 - 4\times(-6)\times(-2) = 49-48 = 1$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-7-1}{-12} = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-7+1}{-12} = \dfrac{1}{2}$

$-6x^2+7x-2$ est donc du signe de $a=-6$ entre $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$ et du signe contraire à l'extérieur

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-6x^2+7x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

S = $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{2}{3}\right[\cup\,]1\,;\,+\infty[$

$\boxed{5}$ Résoudre les équations suivantes 1° $\sqrt{2x-4} = x+1$

$\sqrt{2x-4} = x+1 \Leftrightarrow 2x-4 = (x+1)^2$ et $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x-4 = x^2+2x+1$ et $x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2-5=0$ et $x \geq -1$ l'équation $-x^2-5=0$ n'a pas de solution donc S = $\varnothing$

2° $\sqrt{2x-1} = x-2$

$\sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow 2x-1 = (x-2)^2$ et $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 = x^2-4x+4$ et $x \geq 2$

$\Leftrightarrow 2x-1-x^2+4x-4 = 0$ et $x \geq 2 \Leftrightarrow -x^2+6x-5=0$ et $x \geq 2$

Résolution de l'équation $-x^2+6x-5$

Calcul du discriminant : $\Delta = 36 - 4 \times (-1) \times (-5) = 36 - 20 = 16$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{6-4}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{6+4}{-2} = -5$

Les deux solutions sont strictement inférieures à 2 donc l'équation $\sqrt{2x-4} = x - 2$ n'admet pas de solution : $S = \varnothing$

3° $3x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ On remarquera que – 1 est racine évidente

On note $P(x) = 3x^3 + x^2 - x + 1$

$P(-1) = -3 + 1 + 1 + 1 = 0$ donc on peut factoriser par $x - (-1) = x + 1$.

Il faut donc déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - x + 1 &= (x+1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ &= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c \end{aligned}$$

Par identification il suffit de prendre a, b et c solutions du système $\begin{cases} a = 3 \\ b + a = 1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b + a = 1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 - 3 \\ b = -1 - 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc, pour tout réel x, $P(x) = (x+1)(3x^2 - 2x + 1)$ et on a alors : $P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Résolution de l'équation $3x^2 - 2x + 1$

Calcul du discriminant : $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times 1 = -8$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution

On a donc $P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ et $S = \{-1\}$

$\boxed{6}$ A tout nombre m, on peut associer une parabole $\mathscr{P}_m$ d'équation : $y = x^2 - 2mx + 2 - m$.

1° Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la parabole $\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point.

Les abscisses des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}_m$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$

$\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point si, et seulement si, cette équation n'admet qu'une solution.

Equation $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$

$a = 1 \neq 0$ donc cette équation est du second degré.

Calcul du discriminant : $\Delta = 4m^2 - 4(2 - m) = 4m^2 + 4m - 8 = 4(m^2 + m - 2)$

$\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point si, et seulement si, $\Delta = 0$

Il faut donc résoudre l'équation d'inconnue m, $m^2 + m - 2 = 0$

Calcul du discriminant de cette nouvelle équation : $\delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$et $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$.

Conclusion : $\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point si, et seulement si, $m = 1$ ou $m = -2$

Si $m = 1$ l'équation de $\mathscr{P}_m$ est alors $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

La parabole $\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses au point A (1 ; 0)

Si $m = -2$ l'équation de $\mathscr{P}_m$ est alors $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

La parabole $\mathscr{P}_m$ coupe l'axe des abscisses au point B (2 ; 0)

2° a) Donner, en fonction de m, les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}_m$.

L'abscisse du sommet est $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2m}{2}$ et l'ordonnée est $f(m) = m^2 - 2m^2 + 2 - m = -m^2 - m + 2$

b) En déduire les valeurs de m telles que $\mathscr{P}_m$ admette un sommet d'ordonnée – 5.

$\mathscr{P}_m$ admet un sommet d'ordonnée – 5 si, et seulement si, $-m^2 - m + 2 = -5 \Leftrightarrow -m^2 - m + 7 = 0$

Résolution de l'équation $-m^2 - m + 7 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 7 = 1 + 28 = 29$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{-2} = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{-2} = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$

Conclusion : $\mathscr{P}_m$ admet un sommet d'ordonnée – 5 si, et seulement si, $m = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$ et $m = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$