I Développement

« Pièges à éviter » : - Ne pas oublier le double produit dans le développement d'un carré

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

- Lorsqu'on a un signe « - » devant une parenthèse, il faut changer tous les signes.

$$-(A + B - C) = - A - B + C$$

- Un signe « – » devant un trait de fraction, c'est comme un signe « – » devant une parenthèse au numérateur. $-\dfrac{N}{D} = \dfrac{-N}{D}$

Exercice 1 : Développer chacune des expressions suivantes $A(x) = (x - 1)(-x + 2) + (2x + 1)^2$ $B(x) = (x - 3)^2 - 4x(x - 1)$ $C(x) = (2x + 5)^2 - (5x + 2)(5x - 2) - (1 - x)(3 + x)$	**Exercice 2**: Ecrire sous forme d'un quotient les expressions suivantes $D(x) = 2 - \dfrac{x - 3}{x + 1}$; $E(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1 + x}{x^2}$ $F(x) = \dfrac{x + 3}{x} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$; $G(x) = x - 3 - \dfrac{x - 3}{x + 1}$

Réponses « en vrac » : $-3x^2 - 2x + 9$, $\dfrac{x + 5}{x + 1}$; $\dfrac{4x + 6}{x(x + 2)}$, $\dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$, $3x^2 + 7x - 1$, $-20x^2 + 22x + 26$; $-\dfrac{1}{x^2}$

II Factorisation

Les questions à se poser pour factoriser :

Est-elle déjà factorisée ? Si oui, on vérifie que la factorisation est optimale, c'est-à-dire que chaque parenthèse est elle-même factorisée.
Exemple : Factoriser $A(x) = (5x - 1)(-3x^2 - x)$
Dans tous les termes de la somme, a-t-on un facteur commun ? Si oui, souligner ce facteur commun, le mettre en facteur, puis écrire entre crochets ce qui n'est pas souligné :
Il doit y avoir autant de termes dans les crochets que dans la somme initiale.
Exemple : Factoriser $B(x) = (2x - 1)(x + 4) + (x + 4)^2 - 2(x + 4)(x + 3)$
Reconnaît-on une identité remarquable ?
Si la réponse à chaque question précédente est non, alors développer : l'expression obtenue après développement peut être du 1^er^ degré ou facilement factorisable.
« Pièges à éviter » : - Ne pas oublier le facteur 1 dans une factorisation : $AB + A = A(B + 1)$
- La somme de deux carrés ne se transforme pas en forme factorisée.

Trouver des facteurs communs :

Ce facteur commun peut être caché, par exemple $x - 1$ apparaît dans $2x - 2$, $2x - 2 = 2(x - 1)$ $x - 1$ apparaît dans $-x + 1$, $-x + 1 = -(x - 1)$	$x - 1$ apparaît dans $x^2 - 1$, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ $x - 1$ apparaît dans $(3x + 3)(-4x + 4)$, $(3x + 3)(-4x + 4) = -4(3x + 3)(x - 1)$

Exercice3 : Dans chaque cas, préciser le (ou les) facteur(s) commun(s), puis écrire l'expression factorisée :

Expression	Facteur(s) commun(s)	Expression factorisée
$(5x - 3)(3x - 4) + 9x(3x - 4)$		
$(4x + 1)(3x + 6) + x(x + 2)$		
$3x(x - 2) + x(x - 5)(2 - x)$		
$5x(-2x + 6) - (x + 2)(x - 3)$		
$8x^3 + 4x$		
$(x + 3)^2 - 2x(x + 3)$		

Exercice 4 : *Développer pour factoriser*

1° Soit l'expression $A(x) = (2x - 1)(x + 3) - (x + 1)(x + 3)$ a) Peut-on factoriser $A(x)$? b) Résoudre l'équation $A(x) = 0$ 2° Soit l'expression $B(x) = (2x - 1)(x + 3) - (x + 1)(x - 3)$ a) Peut-on factoriser $B(x)$? Pourquoi ? b) Développer $B(x)$. Peut-on factoriser l'expression développée ? Indiquer la factorisation éventuelle. Résoudre l'équation $B(x) = 0$.	3° Soit l'expression $C(x) = x(2x + 1) + 3(x - 2)$ a) Peut-on factoriser $C(x)$? Pourquoi ? b) Développer $C(x)$. Sait-on factoriser l'expression développée ? c) Justifier que pour tout x, $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$. d) Utiliser cette égalité pour factoriser $2(x^2 + 2x - 3)$. e) Résoudre l'équation $C(x) = 0$.

Exercice 5 : Factoriser les expression suivantes :

$A(x) = (2x + 1)(2x + 3) – (2x + 1)(x – 3)$

$B(x) = (2x – 5)(x + 6) – 2x – 12$

$C(x) =2x(1 – x) + (1 – x)$

$D(x) = (2x + 5)(5x – 4) – x(4 – 5x)$

$E(x) = (3x + 8)(x + 2) – (x + 4)^2$

$F(x) = (2x – 3)^2 – 4x + 6$

$G(x) = (x – 2)(x + 3) + x^2 – 4x + 4$

$H(x) = (x – 5)(2x + 3) + (4x – 5)(5 – x)$

$I(x) = 4x^2 - 1 – (3x + 5)(2x – 1)$

$J(x) = (x – 1)(2x – 3) – (1 – x)^2 + x – 1$

$K(x) = (x – 3)(x \quad 2) – (x + 2)^2 + 2x^2 + 4x$

$L(x) =(x + 3)(x + 1) – (x – 3)(x – 1)$

1) Equation sans inconnue au dénominateur

En 2^nde^, nous ne savons résoudre que des équations du 1^er^ degré, ou se ramenant au 1^er^ degré (équation produit).

Pour résoudre une équation du type A(x) = B(x) :

- a- On transpose tout dans le même membre : on se ramène à un équation du type $P(x) = 0$
- b On cherche à factoriser $P(x)$ (voir paragraphe précédent) : on a donc une équation du type $U \times V = 0$
- c- On applique la règle du produit nul : $U\times V = 0$ équivaut à $U = 0$ ou $V = 0$.
- d- On conclut.

Exercice 6 : Résoudre les équations suivantes :

$8(x – 2) – 12(x – 5) = -15x + 3(2 – 9x)$

$\frac{x}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{4}{3}x – \frac{5}{4} = x + \frac{1}{12}$

$(3x + 2)(x – 5) – (x + 5)(x – 5) = 0$

$x^2 + 10x + 25 = 0$

$(2x + 3)^2 – (5x – 1)^2 = 0$

$(2x – 1)(x + 6) = 2x^2 + 15x$

$(x^2 + 3x – 4)^2 = (x^2 + 8x + 4)^2$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x – 1)$

$(3x – 1)(2x + 5) = (1 – 3x)(x + 1)$

$(2x + 3)(x – 3) + x(x + 3) = 0$

$2x(x + 1) – (x + 1)^2 = -3$

2) Equation avec inconnue au dénominateur

Pour résoudre une équation où l'inconnue intervient au dénominateur :

- a- On cherche la (ou les) valeur(s) interdite(s) : ce sont les valeurs qui annulent les dénominateurs.
- b- On transpose tout dans un même membre
- c- On réduit au même dénominateur pour obtenir un quotient nul : $\frac{N}{D} = 0$
- d- On applique la règle du quotient nul : $\frac{N}{D} = 0$ équivaut à $N = 0$ et D ý 0
- e- On résout l'équation ainsi obtenue $N = 0$. (voir paragraphe précédent)
- f- On vérifie si les valeurs trouvées ne sont pas interdites et on conclut.

Exercice 7 : Résoudre les équations suivantes :

$\frac{4x – 1}{5x} = 0$	$\frac{x – 16}{x – 4} = 0$	$\frac{4x – 8}{x – 3} = 1$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = 0$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x(x + 1)}$	$\frac{1}{x + 2} – \frac{4}{x – 2} = \frac{x}{x^2 – 4}$