III VALEUR ABSOLUE

1° Distance entre deux réels

a) Distance et valeur absolue

La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit.
Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$.
$|x - y|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

b) Exemples

$|3 - 8|$ est la distance entre les réels 3 et 8. Cette distance est égale à $8 - 3 = 2$.
$|2 + 3|$ est la distance entre les réels 2 et – 3. Cette distance est égale à $2 - (-3) = 5$.

c) Exercices

$\boxed{1}$ Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée.

On note a, b et x les abscisses respectives des points A, B et M.
L'égalité $|x - a| = |x - b|$ se traduit par MA = MB, avec A, B et M alignés :
cela signifie que M est le milieu du segment [AB].

$\boxed{2}$ Trouver tous les nombres x tels que $|x + 2| = 5$.

A et M sont les points d'abscisses respectives –1 et x sur une droite graduée :
$AM = |x - (-2)| = |x + 2|$
Trouver tous les nombres x tels que $|x + 2| = 5$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que AM = 3.
Les nombres cherchés sont donc : $-2 - 5 = -7$ et $-2 + 5 = 3$.

2° Valeur absolue d'un réel

a) Définition

Lorsque $y = 0$, $| x - y | = | x |$. Le nombre réel $| x |$ est alors la distance entre x et 0.

- Parmi les réels x et – x l'un est positif l'autre est négatif.

La valeur absolue de x est celui des deux qui est positif
(Dans le cas où x est nul x et – x sont égaux, il sont tous les deux positif et négatif et $| 0 | = 0$

- On a alors :

$$\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \geq 0 \\ |x| = -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

- $| x |$ est le plus grand des nombres x et – x

b) Exemples

$| 5 | = 5$ car 5 est un nombre positif. $|-3| = 3$ car – 3 est un nombre négatif.
Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$. $\sqrt{x^2} = | x |$

d) Propriétés

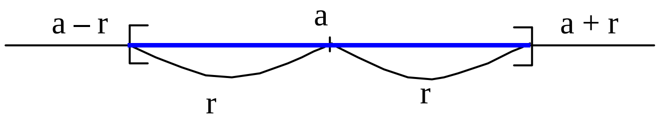
$| x | = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
$| -x | = | x |$
$| x | = | y |$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

$\sqrt{x^2} = |x|$
$|xy| = |x| \times |y|$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ si } y \neq 0$$
Inégalité du Triangle : $| x + y | \leq | x | + | y |$

3° L'inégalité ½x – a½£ r (a et r fixés, r > 0)

a) Propriété

a est un réel, r est un réel strictement positif.
$| x - a | \leq r \Leftrightarrow x \in [\, a - r \,;\, a + r \,] \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$.
L'intervalle $[a - r \,;\, a + r]$ est dit centré en a



b) Démonstration

$|x - a| \leq r$ signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r, c'est à dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.

c) Inéquation | x | £ a

- Si $a < 0$: $| x | \leq a$ n'a pas de solution
- Si $a \geq 0$: $| x | = a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

4° Encadrement et valeur approchées

a) Encadrement

Soit x un nombre donné.
Déterminer un **encadrement** de x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$.
Le nombre $b - a$ est l'**amplitude** de cet encadrement.

b) Exemples:

Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 1, de π d'amplitude 0,1.

c) Valeur Approchée

Soit a et x deux réels et $\varepsilon > 0$.
a est une **valeur approchée** de x (ou approximation) à ε près (ou à la précision ε près) si et seulement si

$$| x - a | \leq \varepsilon$$

On a alors un encadrement d'amplitude 2ε

a est une valeur approchée de x à ε près **par défaut** si et seulement si

$$a \leq x \leq a + \varepsilon$$

On a alors un encadrement d'amplitude ε

a est une valeur approchée de x à ε près **par excès** si et seulement si

$$a - \varepsilon \leq x \leq a$$

On a alors un encadrement d'amplitude ε

d) Propriétés

Soit x tel que $a \leq x \leq b$, une valeur approchée de x est $c = \dfrac{a + b}{2}$.

La précision est $\varepsilon = \dfrac{b - a}{2}$ et c est une valeur approchée de x à ε près soit : $| x - c | \leq \varepsilon$.

Si x tel que $a \leq x \leq b$ et que $c \leq a \leq b \leq d$ alors on a : $c \leq a \leq x \leq b \leq d$

e) Exemple.

$\sqrt{3} \approx 1{,}732$
1,73 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près car $1{,}72 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$
1,73 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près car $1{,}72 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}73$
1,74 est une valeur approchée par excés de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près car $1{,}73 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$
1,73 est un arrondi de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près car $1{,}725 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}735$