Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité, c'est à dire donner l'ensemble des solutions. On note, en général, cet ensemble S

I EQUIVALENCE

Pour déterminer les solutions et toutes les solutions on cherche à raisonner par équivalence.

1° Equation et addition. On parle souvent de "transposition"

Lorsqu'on ajoute ou que l'on retranche un même réel aux deux membres d'une équation, on obtient une autre équation qui a exactement les mêmes solutions.

Ces équations sont dites équivalentes

Exemples

$2x = 3x - 5 \Leftrightarrow 2x - 3x = -5$	On ajoute $-3x$ à chaque membre de l'équation
$2(x-1) = (1-x)(x+2) \Leftrightarrow 2(x-1) - (1-x)(x+2) = 0$	On ajoute $-(1-x)(x+2)$
$3x - 2 = -2x + 5 \Leftrightarrow 3x + 2x = 5 + 2$	On ajoute $2x + 2$

2° Equation et produit.

Lorsqu'on multiplie ou que l'on divise chaque membre d'un équation par un même réel différent de 0, on obtient une autre équation qui a exactement les mêmes solutions.

Ces équations sont dites équivalentes

Exemples

$4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^3 - 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x = 0$	On divise chaque membre de l'équation par 2
$-\dfrac{2}{3}x = \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{5} \times \left(-\dfrac{3}{2}\right)$	On divise par $-\dfrac{2}{3}$ ce qui revient à multiplier par $-\dfrac{3}{2}$

II EQUATIONS DU PREMIER DEGRES. C'est-à-dire de la forme a x + b = 0.

1° Généralité

si $a \neq 0$ $\boxed{ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}}$

2° Exemples

De tête

$-2x + 3 = 0$	$-1 - 2x = 0$	$3x + \sqrt{3} = 0$	$\dfrac{2x-3}{3} = 0$	$\dfrac{3}{4} - 3x = 0$

Moins simple

$2(x-3) - 3(2x+1) = 0$	$\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5x}{9} + \dfrac{x}{2}$	$x\sqrt{2} - \sqrt{3} = 2x + 1$	$\dfrac{2x-3}{2} + \dfrac{3x-5}{3} = \dfrac{x+1}{6}$

III EQUATIONS SANS INCONNUES AU DENOMINATEUR

1° Méthode générale

Pour résoudre une équation du type E = F:

- On transpose tout dans le premier membre pour obtenir 0 dans le second membre. : $E = F \Leftrightarrow E - F = 0$
- On factorise, si possible, le premier membre pour obtenir un produit nul: $A \times B = 0$.

Si aucune factorisation n'est possible, alors on développe.

- On applique la règle du produit nul : $\boxed{A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0}$
- On conclut

2° Exemple1 Résolution dans l'ensemble des réels de $2x^2 = x$.

$2x^2 = x$.	• On transpose tout dans le premier
$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 0$	• On factorise, si possible, le premier membre
$\Leftrightarrow x(2x - 1) = 0$	• On applique la règle du produit nul :
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x - 1 = 0$	• On conclut
$S = \left\{0 ; \dfrac{1}{2}\right\}$	

3° Exemple Résolution dans l'ensemble des réels de $2x(x+2)-1 = x.(2x-3)$

$2x(x+2)-1 = (x+1).(2x-3)$	• On transpose tout dans le premier
$\Leftrightarrow 2x(x+2)-1-(x+1).(2x-3)$	• On ne peut pas factoriser, on développe
$\Leftrightarrow 2x^2+4x-1-(2x^2-3x+2x-3)=0$	• On réduit
$\Leftrightarrow 5x+2=0$ $S = \{-2/5\}$	• On conclut

4° Equations de la forme $x^2 = a$ ($a > 0$)

Si a est un réel **strictement positif** donné.

L'équation "$x^2 = a$" admet **deux** solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ $\boxed{x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}}$

Si a est **nul**

L'équation $x^2 = 0$ admet **une seule** solution 0 $\boxed{x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0}$

Si a est un réel **strictement négatif** donné — L'équation $x^2 = a$ n'a **pas de solution**.

5° Exercices divers.

$(2x+3)(x-5)-(x+1)(x-5)=0$	$x^2+10x+25=0$	$(2x+3)^2-(5-2x)^2=0$
$(2x-1)(x+6)=2x^2+15x$	$(x^2+3x-4)^2=(x^2+8x+4)2$	$x^2+4x+4=(x+2)(x-1)$
$(2x-1)(2x+3)=(1-2x)(x+2)$	$(2x+3)(x+2)-2x(x+3)=0$	$2x(x-1)-(x-1)^2=-3$

6° Quand l'inconnue disparaît.

Exemple 1 $3(1-2x)+5x = 1-x \Leftrightarrow 3-6x+5x-1+x=0 \Leftrightarrow 2=0$.

Cette égalité n'est jamais vérifiée. L'équation n'a pas de solution. On note $\boxed{S = \varnothing}$

Exemple 2 $5(1-x)+3x = 5-2x \Leftrightarrow 5-5x+3x-5+2x=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Cette égalité est toujours vérifiée. Tout x réel est solution. $\boxed{S = \mathbb{R}}$

IV EQUATIONS AVEC L'INCONNUE AU DENOMINATEUR

1° Méthode générale :

- On détermine les **valeurs interdites**, c'est à dire les valeurs de l'inconnue qui annulent le(s) dénominateur(s).
- On utiliser la règle du "produit en croix" : $\boxed{\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C}$ avec $B \neq 0$, $D \neq 0$.

Ou on transpose tout dans le premier membre, puis on réduit ce premier membre sous le même dénominateur.

- On utilise alors la règle $\boxed{\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0}$ (avec $B \neq 0$)
- On vérifie que les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

2° Exemple : Résolution dans l'ensemble des réels de $\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{2}{5}$. (E)

$x \neq 1$	On cherche les "valeurs" interdites"
(E) $\Leftrightarrow (2x+3) \times 5 = 2 \times (x-1)$	On a une équation sans inconnues au dénominateur.
$\Leftrightarrow 10x+15 = 2x-2 \Leftrightarrow 10x-2x = -15-2$ $\Leftrightarrow 8x = -17 \Leftrightarrow x = -17/8$	On vérifie que les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites.
$-17/8 \neq 1$ donc $S = \{-17/8\}$	On conclut

3° Exemple : Résolution dans l'ensemble des réels de $\dfrac{x-3}{x-12} = \dfrac{-3}{x}$ (E)

$x-12 \neq 0$ et $x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 12$ ou $x \neq 0$	On cherche les valeurs interdites.
(E) $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-12} - \dfrac{-3}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-12} + \dfrac{3}{x} = 0$	On transpose tout dans le premier membre
$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)\times x}{(x-12)\times x} + \dfrac{3\times(x-12)}{x\times(x-12)} = 0$	On réduit au même dénominateur.
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+3x-36}{x\times(x-12)} = 0$	On utilise : $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (avec $B \neq 0$)
$\Leftrightarrow x^2-36=0 \Leftrightarrow x=6$ ou $x=-6$	
$6 \neq 12$ et $6 \neq 0$, $-6 \neq 12$ et $-6 \neq 0$ donc $S = \{-6 ; 6\}$	On vérifie que les solutions trouvées ne sont pas interdites