I TRIANGLES ISOMETRIQUES

1° Présentation

On dit que deux triangles sont isométriques si et seulement si ils ont en commun les longueurs de leurs côtés.

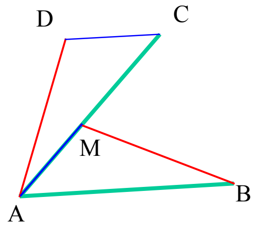
2° Vocabulaire

On a AB =A'B': les côtés [AB] et [A'B'] se correspondent, ils sont dits homologues.
Les côtés [BC] et [B'C'] sont aussi homologues.
On a : $\widehat{A} = \widehat{A'}$: les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ sont dits homologues. les sommets A et A' sont dits homologues

3° Propriétés

• Si deux triangles sont isométriques, leurs angles homologues sont de même mesure deux à deux.
• Deux triangles isométriques ont la même aire.

4° EXEMPLE



AB = AC
AM = CD
BM = AD
Démontrer que ABCD est un trapèze.

5° triangle et "isométries"

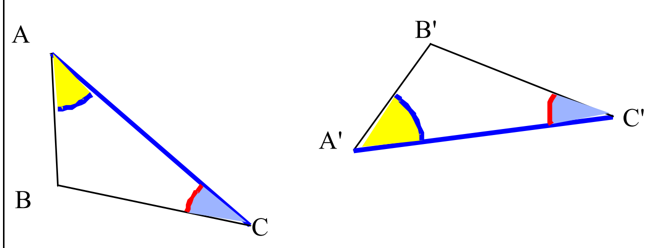
Une translation, une symétrie (axiale ou centrale), une rotation conservent les longueurs ; on les appelle des isométries, d'où le théorème suivant
Pour que deux triangles soient isométriques, il suffit que l'un des deux soit l'image de l'autre par une isométrie.
On peut dire aussi : Si un triangle est l'image d'un autre par une isométrie alors les deux triangles sont isométriques

II CARACTÉRISATION DES TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

On admet les théorèmes suivants

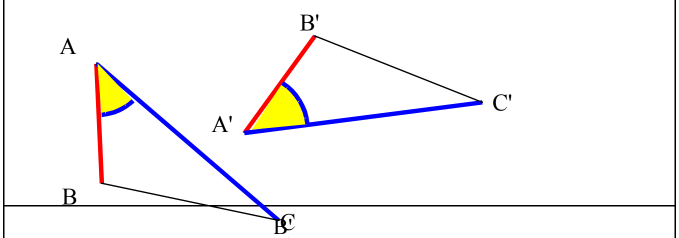
1° Théorème 1

Si deux triangles ont en commun longueur d'un côté et les mesures des deux angles adjacents a ce côté alors ils sont isométriques.



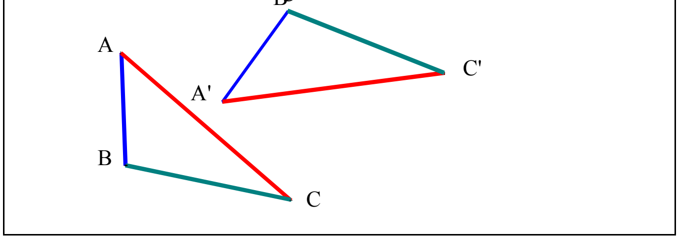
2° Théorème 2

Si deux triangles ont en commun la mesure d'un angle et les longueurs des deux cotés adjacents à cet angle alors ils sont isométriques.

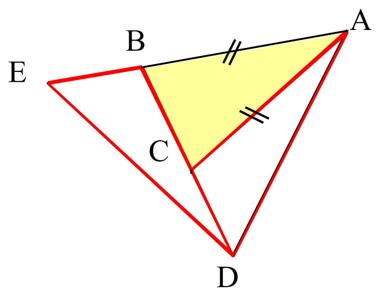


3° Autres caractérisations

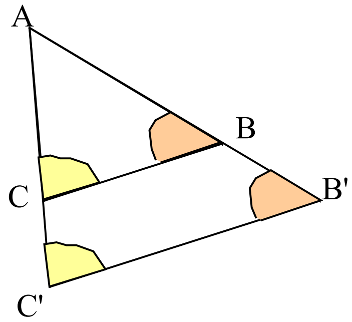
Si deux triangles ont en commun leurs longueurs de leurs trois côtés alors ils sont isométriques
Si un triangle est l'image d'un autre par une isométrie alors les deux triangles sont isométriques



4° Exemple



ABC est isocèle en A tel que AB > BC
D et E sont tels que BD = AB et BE = CD
avec B, C et D alignés et E, B et E alignés dans cet ordre.
Comparer les triangles EBC et ACD.
En déduire que ADE isocèle



III TRIANGLES SEMBLABLES

1° Agrandissement et réduction

Sur la figure, les droites (BC) et (B 'C ') sont parallèles.
Le triangle AB 'C ' est un agrandissement du triangle ABC dans le rapport 1,5
AC'= 1,5 AC.

On a, d'après la propriété de Thalès : $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

Les triangles ABC, AB 'C ' ont donc leurs côtés proportionnels.
Les angles B et B ' d'une part et les angles C et C ' d'autre part sont égaux (angles correspondants formés par les parallèles (BC) et (B 'C ').

2° Vocabulaire

Comme précédemment, on dit
les sommets B et C ont respectivement pour homologues B ' et C '.
Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ont respectivement pour homologues $\widehat{B'}$ et $\widehat{C'}$.
Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont respectivement pour homologues [A 'B '], [A 'C '] et [B 'C '].

3° Triangles semblables.

DEFINITION

Deux triangles T et T ' sont semblables si et seulement si les angles de T sont de même mesure que ceux de T '.

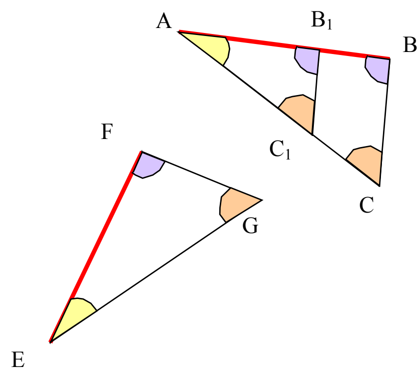
4° Conséquences

• Deux triangles isométriques sont semblables.
• Si deux angles d'un triangle sont égaux respectivement à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.
En effet la connaissance de deux des angles d'un triangle détermine le troisième, puisque leur somme vaut 180°.

IV TRIANGLES SEMBLABLES : PROPORTION DES COTES

1° Exemple

On donne les triangles semblables ABC et EFG, les données sont codées sur la figure.
On repère les éléments homologues.



• sommets homologues : $\begin{matrix} A\ B\ C \\ E\ F\ G \end{matrix}$

• côtés homologues : $\begin{matrix} [AB] & [BC] & [CA] \\ [EF] & [FG] & [GE] \end{matrix}$

On construit le point B_1 du segment [AB] tel que $AB_1 = EF$.
On trace la droite passant par B_1, parallèle à (A C) et qui coupe (AC) en C_1.
ABC et EFG sont semblables donc $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{FGE}$
$(BC) // (B_1C_1)$ donc $\widehat{ABC} = \widehat{AB_1C_1}$
$\widehat{ABC} = \widehat{FGE} = \widehat{AB_1C_1}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{FEG} = \widehat{B_1AC_1}$

$\left.\begin{matrix} \widehat{FGE} = \widehat{AB_1C_1} \\ \widehat{FEG} = \widehat{B_1AC_1} \\ EF = AB_1 \end{matrix}\right\}$ Les deux triangles $\begin{matrix} EFG \\ AB_1C_1 \end{matrix}$ ont en commun le longueur d'un côté et la mesure des deux angles qui lui sont adjacents ils sont donc isométriques.

2° Théorèrme

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.
Le coefficient de proportionnalité ou rapport de similitude, ainsi obtenu est appelé, selon le cas, rapport d'agrandissement (s'il est supérieur à 1) ou rapport de réduction (s'il est inférieur à 1).

3° Remarques

- Si les triangles T et T' sont semblables et si les triangles T' et T'' sont aussi semblables, alors T et T'' sont semblables.
- Deux triangles isométriques sont semblables. (Le rapport est égal à 1.)
- Si T' est un agrandissement (ou une réduction) de rapport k de T, alors aire (T') = k^2 aire (T).

IV CARACTÉRISATION DES TRIANGLES SEMBLABLES

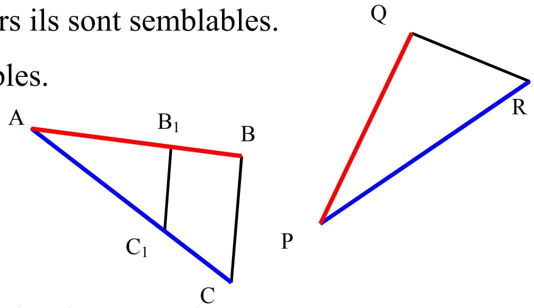
1° Autre caractérisation

Si deux triangles ont en commun les mesure de deux angles alors ils sont semblables

On admet les théorèmes suivants (les démonstrations sont données à titre indicatif)

2° Théorème 1

Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles, alors ils sont semblables.



Si $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$ alors les triangles ABC et QRP sont donc semblables.

• sommets homologues : $\begin{matrix} A\ B\ C \\ P\ Q\ R \end{matrix}$

Démonstration : (hors programme)

On donne les triangles ABC et PQR, tels que $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$.

On construit le point B_1 du segment [AB] tel que $AB_1 = PQ$ et C_1 le point de [AC] tel que $AC_1 = PR$

$\left.\begin{array}{l} A, B \text{ et } B_1 \text{ sont alignés dans cet ordre} \\ A, C \text{ et } C_1 \text{ sont alignés dans cet ordre} \\ \dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AC}{AC_1} \end{array}\right\}$ D'après la réciproque du théorème de Thalès on a donc $(B_1C_1) // (BC)$

En appliquant le théorème de Thalès on peut dire que $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$ donc $B_1C_1 = QR$

$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 = QR \\ AB_1 = PQ \\ AC_1 = PR \end{array}\right\}$ Les triangles $\begin{matrix} A\ B_1\ C_1 \\ P\ Q\ R \end{matrix}$ ont en commun les longueurs de leurs côtés ils sont donc isométriques

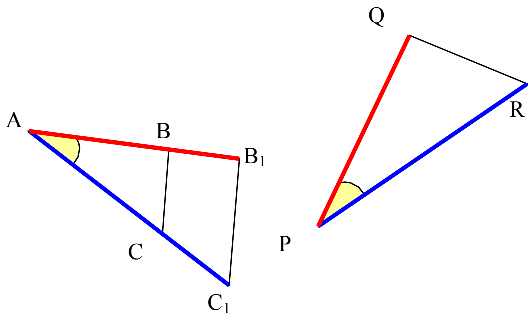
Ils ont donc en commun les mesures de leurs angles et donc $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{PQR}$ et $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{PRQ}$

La droite (AB) coupe les parallèles (BC) et (B_1C_1) les angles correspondants sont donc de même mesure et donc $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{ABC}$ De même $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{ACB}$

$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} = \widehat{PQR} \\ \widehat{ACB} = \widehat{PRQ} \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{matrix} A\ B\ C \\ P\ Q\ R \end{matrix}$ sont donc semblables.

3° Théorème 2

Étant donné deux triangles ABC et PQR, si on a



- $\widehat{A} = \widehat{P}$
- $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$

alors les triangles ABC et PQR sont semblables.

• sommets homologues : $\begin{matrix} A\ B\ C \\ P\ Q\ R \end{matrix}$

Démonstration (hors programme)

On construit le point B_1 du segment [AB] tel que $AB_1 = PQ$ et C_1 le point de [AC] tel que $AC_1 = PR$

$\left.\begin{array}{r} AB_1 = PQ \\ AC_1 = PR \\ \widehat{B_1AC_1} = \widehat{BAC} = \widehat{QPR} \end{array}\right\}$ Les triangles $\begin{matrix} A\ B_1\ C_1 \\ P\ Q\ R \end{matrix}$ ont en commun la mesure d'un angle et les longueurs de deux côtés qui lui sont adjacents ils sont donc isométriques. Ils ont donc en commun les mesures de leurs angles et on peut dire que : $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{PQR}$ et $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{PRQ}$

$\left.\begin{array}{l} A, B \text{ et } B_1 \text{ sont alignés dans cet ordre} \\ A, C \text{ et } C_1 \text{ sont alignés dans cet ordre} \\ \dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AC}{AC_1} \end{array}\right\}$ D'après la réciproque du théorème de Thalès on a donc $(B_1C_1) // (BC)$

La droite (AB) coupe les parallèles (BC) et (B_1C_1) les angles correspondants sont donc de même mesure et donc $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{ABC}$ De même $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{ACB}$

$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} = \widehat{AB_1C_1} = \widehat{PQR} \\ \widehat{ACB} = \widehat{AC_1B_1} = \widehat{PRQ} \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{matrix} A\ B\ C \\ P\ Q\ R \end{matrix}$ sont donc semblables.