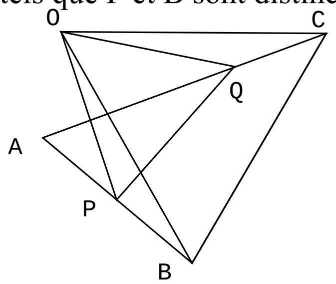
$\boxed{1}$ Sur la figure ci-contre ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$ et OBC est un triangle équilatéral.

P et Q sont deux points appartenant respectivement aux segments [AB] et [AC] tels que P et B sont distincts C et Q sont distincts et BP = CQ . Il s'agit de déterminer la nature du triangle OPQ.



1° Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

2° Justifier l'égalité $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$

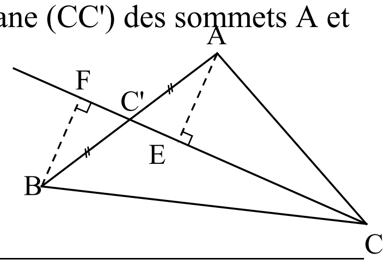
3° a) Montrer que les triangles OPB et OQC sont isométriques.

b) En déduire que OP = OQ.

4° Montrer que $\widehat{POQ} = 60°$.

5° Quelle est la nature du triangle POQ ? Justifier la réponse.

$\boxed{2}$ On se propose de montrer que deux des sommets d'un triangle sont équidistants de la médiane issue du troisième sommet. A cet effet, on nomme E et F les projetés orthogonaux sur la médiane (CC') des sommets A et B d'un triangle ABC (voir la figure de la page suivante).



a) Première méthode : Montrer que les triangles AEC' et BC'F sont isométriques. Conclure.

b) Deuxième méthode : A l'aide du théorème de Thalès, démontrer l'égalité : $\frac{AE}{BF} = 1$.

Conclure.

$\boxed{3}$ ABC est un triangle isocèle de sommet A

Les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ coupent respectivement (AC) et (AB) en B' et C'.

a) Comparer les triangles BB'C et CC'B

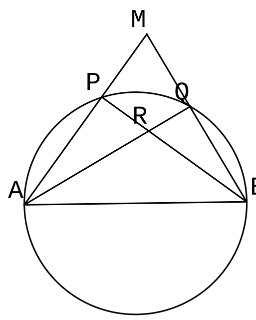
b) Montrer que BC' = B'C = B'C' .

$\boxed{5}$ On considère un cercle de diamètre [AB], un point M de Δ n'appartenant pas à (AB).

Les droites (MA) et (MB) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en P et Q.

Les droites (AQ) et (BP) se coupent en R.

Démontrer que les droites (MR) et (AB) sont perpendiculaires.



CORRECTION

1 **Sur la figure ci-contre ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$ et OBC est un triangle équilatéral. P et Q sont deux points appartenant respectivement aux segments [AB] et [AC] tels que P et B sont distincts C et Q sont distincts et BP = CQ . Il s'agit de déterminer la nature du triangle OPQ.**

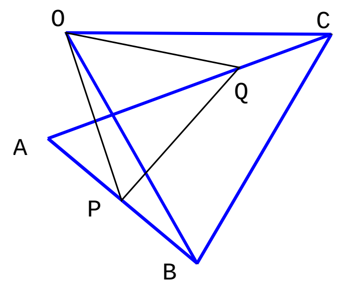
1° Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

Le triangle OBC est équilatéral donc $\widehat{OBC} = 60°$

2° Justifier l'égalité $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$

$\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$ donc les points B, C, A et O sont sur un même cercle $\mathscr{C}$. les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{ACO}$ sont inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{OA}$ ils sont donc égaux

3° a) Montrer que les triangles OPB et OQC sont isométriques.



$$\left.\begin{array}{r}\text{Par hypothèse } BP = CQ \\ \text{On a démontré que } \widehat{PBO} = \widehat{QCO} \\ \text{OBC est équilatéral donc } OB = OC\end{array}\right\}$$

les triangles $\begin{array}{c}OPB\\OQC\end{array}$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux

ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l}\text{O et O sont homologues}\\ \text{P et Q sont homologues}\\ \text{B et C sont homologues}\end{array}\right.$

b) En déduire que OP = OQ. Deux triangles isométriques ont leurs côtés deux à deux de même longueur . OPB et OQC sont isométriques donc OP = OQ.

4° Montrer que $\widehat{POQ} = 60°$. $\widehat{POQ} = \widehat{POB} + \widehat{BOC} - \widehat{QOP}$

Deux triangles isométriques ont leurs angles deux à deux de même mesure . OPB et OQC sont isométriques donc $\widehat{POB} = \widehat{QOP}$ et donc . $\widehat{POQ} = \widehat{POB} + \widehat{BOC} - \widehat{QOP} = \widehat{BOC} = 60°$

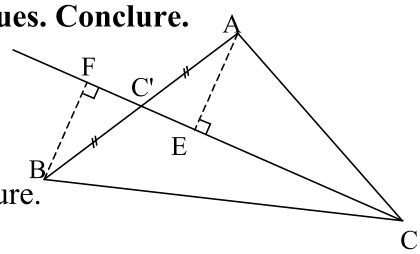
5° Quelle est la nature du triangle POQ ? Justifier la réponse.

Le triangle POQ a un angle de 60° (On a démontré que $\widehat{POQ} = 60°$) et deux côtés de même longueur (On a démontré que OP = OQ) il est donc équilatéral

---

2 **On se propose de montrer que deux des sommets d'un triangle sont équidistants de la médiane issue du troisième sommet. A cet effet, on nomme E et F les projetés orthogonaux sur la médiane (CC') des sommets A et B d'un triangle ABC (voir la figure de la page suivante).**

a) Première méthode : Montrer que les triangles AEC' et BC'F sont isométriques. Conclure.



C ' est le milieu de [AB] donc AC ' = BC '

E est le projeté orthogonal de A sur (CC ') donc $\widehat{AEC'} = 90°$

F est le projeté orthogonal de B sur (CC ') donc $\widehat{BFC'} = 90°$

Les angles $\widehat{AC'E}$ et $\widehat{BC'F}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc de même mesure.

$$\left.\begin{array}{c}AC' = BC' \\ \widehat{AEC'} = \widehat{BFC'} \\ \widehat{AC'E} = \widehat{BC'F}\end{array}\right\}$$ les triangles $\left\{\begin{array}{l}AEC'\\BFC'\end{array}\right.$ ont en commun la longueur d'un côté et les mesures de deux angles qui lui sont adjacents ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l}\text{E et F sont homologues}\\ \text{C ' et C ' sont homologues}\\ \text{A et b sont homologues}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}AEC'\\BFC'\end{array}\right.$ sont isométriques ils ont donc en commun les longueurs de leurs trois côtés donc AE = BF.

La distance du point A à la droite (CC ') est égale à AE et celle du point b à la droite (CC ') est égale à BF.
Comme AE = BF on peut dire que A et b sont équidistant de la droite (CC ').

b) Deuxième méthode : A l'aide du théorème de Thalès, démontrer l'égalité : $\frac{AE}{BF} = 1$. Conclure.

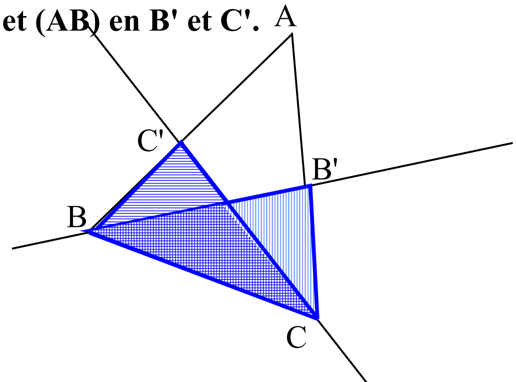
$$\left.\begin{array}{c}\text{B, C ' et A sont alignés} \\ \text{F, C ' et E sont alignés} \\ (BF) // (AE)\end{array}\right\}$$ on peut donc appliquer le théorème de Thalès. $\frac{C'B}{C'A} = \frac{C'F}{C'E} = \frac{AE}{BF}$

C ' est le milieu de [AB] donc C' 'A = C 'B donc $\frac{AE}{BF} = 1$ donc AE = BF

$\boxed{3}$ ABC est un triangle isocèle de sommet A

Les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ coupent respectivement (AC) et (AB) en B' et C'.

a) Comparer les triangles BB'C et CC'B



ABC est isocèle en a donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

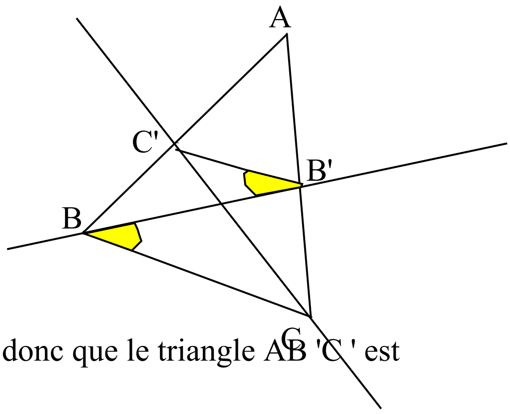
(BB ') est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ donc $\widehat{B'BC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$

(CC ') est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ donc $\widehat{C'CB} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ donc $\widehat{B'BC} = \widehat{C'CB}$

$\left.\begin{array}{c} \widehat{B'BC} = \widehat{C'CB} \\ \widehat{B'CB} = \widehat{C'BC} \\ BC = BC \end{array}\right\}$ Les triangles $\left\{\begin{array}{l} B'BC \\ C'CB \end{array}\right.$ ont en commun la mesure d'un côté et les mesures des deux angles qui lui sont adjacents ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l} B' \text{ et } C' \text{ sont homologues} \\ B \text{ et } C \text{ sont homologues} \\ C \text{ et } B \text{ sont homologues} \end{array}\right.$

b) Montrer que BC' = B'C = B'C' .



Les triangles $\left\{\begin{array}{l} B'BC \\ C'CB \end{array}\right.$ sont isométriques

Ils ont donc en commun les longueurs de leurs côtés donc $\left\{\begin{array}{l} BB' = CC' \\ B'C = C'B' \end{array}\right.$

ABC est isocèle en A donc AB = AC

On a donc démontré que $\left\{\begin{array}{l} AB = AC \\ BC' = CB' \end{array}\right.$, on peut en déduire que AC ' = AB ' et donc que le triangle AB 'C ' est isocèle en A.

Comme de plus $\dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{AB'}{AC}$ et que A, C ' et B sont alignés dans cet ordre et que A, B ' et C sont aussi alignés dans cet ordre on peut dire , en utilisant la réciproque du théorème de Thalès que (B 'C ') // (BC)

La droite (BB ') coupe les droites parallèles (BC) et (B 'C ') et les angles $\widehat{B'BC}$ et $\widehat{BB'C'}$ sont alterne externes dans cette configuration ils sont donc de même mesure.

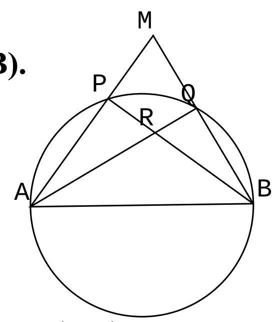
(BB ') est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ donc $\widehat{B'BC} = \widehat{BB'C'}$

On a donc $\widehat{BB'C'} = \widehat{B'BC} = \widehat{B'BC}$

le triangle BC 'B ' a deux angles de même mesure il est donc isocèle

On peut alors conclure que BC ' = B 'C '

$\boxed{5}$ On considère un cercle de diamètre [AB], un point M du plan n'appartenant pas à (AB).



Les droites (MA) et (MB) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en P et Q.

Les droites (AQ) et (BP) se coupent en R.

Démontrer que les droites (MR) et (AB) sont perpendiculaires.;

Pas de triangles isométriques dans cet exercice

P est sur le cercle de diamètre [AB] donc (BP) $\perp$ (AM)

Q est sur le cercle de diamètre [AB] donc (AQ) $\perp$ (BM)

Dans le triangle ABM les droites (AQ) et (BP) sont deux hauteurs donc leur point d'intersection est l'orthocentre du triangle ABM.

Dans le triangle ABM, la droite (MR) passe par le sommet M et par l'orthocentre R c'est donc la troisième hauteur. On peut conclure que (MR) $\perp$ (AB)