Devoir maison n° 1 A rendre pour le 22 / 09 / 03

Exercice I

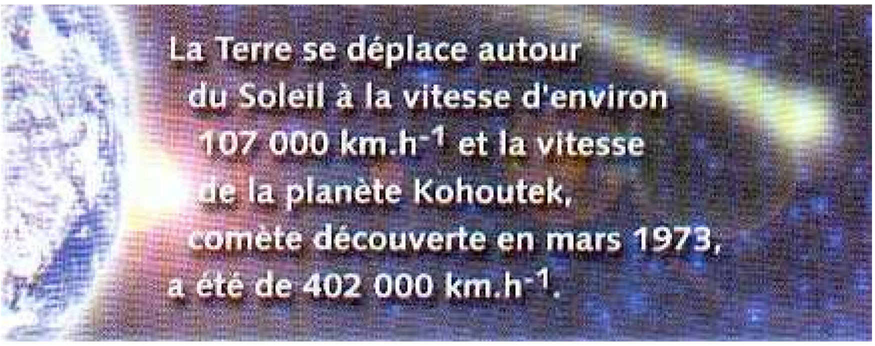
En physique, la masse d'un objet est une mesure de la quantité de matière de cet objet.
Le physicien Albert Einstein a prouvé que cette masse dépend de la vitesse de l'objet et que si m_0 est la masse au repos, la masse m à la vitesse v est donnée par la formule : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

où c est la vitesse de la lumière, vitesse voisine, dans le vide, de 299790 km . s^{-1}. Dans les calculs ci-dessous, on utilisera 300000 km . s^{-1} comme vitesse de la lumière.

1° a) Quelle est la vitesse en km . h^{-1} d'un objet dont la vitesse est 1 km . s^{-1} ? 10 km . s^{-1} ?

b) Déterminer le rapport $\dfrac{m}{m_0}$ à 10^{-4} près, lorsque v = 1 km . s^{-1} puis lorsque v = 10 km . s^{-1}.

c) Justifier la phrase suivante
« Aux vitesses inférieures à 5000 km . h^{-1}, on peut considérer la masse constante ».



2° Pour ces deux vitesses, calculer le rapport $\dfrac{m}{m_0}$ à 10^{-9} près.

3° a) Dans un accélérateur de particules, on communique à un électron une vitesse de 0,1 c. Quelle est l'augmentation de masse en pourcentage à 0,1 % près?

b) Quelle vitesse minimale, de la forme a . 10^3 km .s^{-1} avec a entier naturel, faut-il communiquer à une particule atomique pour que sa masse devienne au moins le double de sa masse au repos?

Exercice II

On se propose de calculer la valeur exacte du produit ab pour

$$a = 2{,}548\ 796\ 52 \times 10^7 \text{ et } b = 1{,}125\ 487\ 963 \times 10^{-5}.$$

1° Donner un ordre de grandeur de a × b.

2° Justifier que $a = 254\ 879\ 652 \times 10^{-1}$ et que $b = 1\ 125\ 487\ 963 \times 10^{-14}$.

3° En écrivant

$$254\ 879\ 652 = 254 \times 10^6 + 879 \times 10^3 + 652 \text{ et } 1\ 125\ 487\ 963 = 1 \times 10^9 + 125 \times 10^6 + 487 \times 10^3 + 963$$

calculer la valeur exacte de ab à l'aide d'une calculatrice pour les calculs intermédiaires.

Ex I 1°a) 1 km ; s^{-1} = $\boxed{3600 \text{ km .h}^{-1}}$ 10 km ; s^{-1} = $\boxed{36000 \text{ km .h}^{-1}}$ b) $\boxed{\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}$

b) Si v= 1 km .s^{-1} En remplaçant v par 1 et c par 300 000 Ma calculatrice donne : $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000000056}$

on a alors : $\dfrac{m}{m_0} \approx 1.$ à 10^{-4} près Si v= 10 km .s^{-1} En remplaçant v par 10 et c par 300 000 ma calculatrice donne : $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000005556}$ On a alors : $\dfrac{m}{m_0} \approx 1.$ à 10^{-4} près

c) En remplaçant v par $\dfrac{5000}{3600}$ et c par 300 000 ma calculatrice donne: $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000000107}$

Intuitivement si v est inférieure à 5000 km .h^{-1} alors $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$ est plus proche de 0 que $\left(\dfrac{5000/3600}{c}\right)^2$ et donc $\dfrac{m}{m_0}$ plus proche de 1 que 1,0000000000107. De façon plus rigoureuse on a : Si v ≤ $\dfrac{50000}{3600}$ alors $0 \le \dfrac{v^2}{c^2} \le \left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2$ alors $1 - \left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2 \le 1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \le 1$ alors $\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2} \le \sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \le \sqrt{1}$ et donc $1 \le \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2}}$ On obtient alors $\boxed{1 \le \dfrac{m}{m_0} \le 1{,}0000000000107}$. On peut alors dire que : $\dfrac{m}{m_0} \approx 1$

2° En remplaçant v par $\dfrac{107000}{3600}$ et c par 300 000 ma calculatrice donne: $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000049078}$ On a donc $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}00000005}$ En remplaçant v par $\dfrac{402000}{3600}$ et c par 300 000 ma calculatrice donne: $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000692747}$. On a donc $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}000000069}$

3° a) Si v =0,1 c on a alors : $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{0{,}1^2\ c^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{1-1\sqrt{01}} \approx 1{,}005038$

Augmentation en pourcentage : **Erreur !**

Si v = a 10^3 km .s^{-1} on a : $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2\ 10^6}{9\ 10^{10}}}} = \dfrac{300}{\sqrt{9\ 10^4 - a^2}}$. On doit alors avoir a ≤ 300 pour que $9\ 10^4 - a^2 \ge 0$.

$\dfrac{m}{m_0} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{300}{\sqrt{9\ 10^4 - a^2}} \le 2 \Leftrightarrow 300 \le 2\sqrt{9\ 10^4 - a^2} \Leftrightarrow 150 \le \sqrt{9\ 10^4 - a^2} \Leftrightarrow 150^2 \le 9\ 10^4 - a^2 \Leftrightarrow a^2 \le 90000- - 22500 \Leftrightarrow a \le \sqrt{67500}$. $\sqrt{67500} \approx 259{,}81$ Il suffit donc de prendre $\boxed{260 \le a \le 300.}$ ($a \in \mathbb{N}$)

Ex II $a \times b = 254\ 879\ 652 \times 1\ 125\ 487\ 963 \times 10^{-15}$.

$254\ 879\ 652 \times 1\ 125\ 487\ 963 = (254 \times 10^6 + 879 \times 10^3 + 652) \times (1 \times 10^9 + 125 \times 10^6 + 487 \times 10^3 + 963)$
$= (254 \times 10^6 + 879 \times 10^3 + 652) \times (1 \times 10^9 + 125 \times 10^6 + 487 \times 10^3 + 963)$
$= (254 \times 10^6 \times 1 \times 10^9 + 254 \times 10^6 \times 125 \times 10^6 + 254 \times 10^6 \times 487 \times 10^3 + 254 \times 10^6 \times 963) +$
$(879 \times 10^3 \times 1 \times 10^9 + 879 \times 10^3 \times 125 \times 10^6 + 879 \times 10^3 \times 487 \times 10^3 + 879 \times 10^3 \times 963) +$
$(652 \times 1 \times 10^9 + 652 \times 125 \times 10^6 + 652 \times 963 =$
$(254 \times 10^{15} + 31750 \times 10^{12} + 123698 \times 10^9 + 244602 \times 10^6) + (879 \times 10^{12} + 109875 \times 10^9 + 428073 \times 10^6 + 846477 \times 10^3) +$
$(652 \times 10^9 + 81500 \times 10^6 + 317524 \times 10^3 + 627876) = 254 \times 10^{15} + (31750 + 879) \times 10^{12} + (123698 + 109875 + 652) \times 10^9$
$+ (244602 + 428073 + 81500)\ 10^6 + (846477 + 317524)\ 10^3 + 627876$
$a \times b = 254 + (31750 + 879) \times 10^{-3} + (123698 + 109875 + 652) \times 10^{-6} + (244602 + 428073 + 81500)\ 10^{-9} + (846477 +$
$317524)\ 10^{-12} = 254 + 32{,}629 + 0{,}233573 + 0{,}000672675 + 0{,}000001164001 + 0{,}000000000627876 =$

$\boxed{286{,}863980339628876}$