

Exercice I

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On pose : $a = \frac{p+1}{2}$ et $b = \frac{p-1}{2}$

1° Démontrer que a et b sont des entiers

2° Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p .

3° Démontrer que tout nombre premier $p > 3$ peut s'écrire comme différence de deux carrés d'entiers.

Donner cette différence pour $p = 29$.

Exercice II**Développement décimal périodique d'un rationnel**

On se propose de vérifier sur quelques exemples un théorème admis « tout nombre admettant un **développement décimal périodique** est un **rationnel** ».

1° Soit le nombre $x = 0,3737 \overline{37} \dots$ dont la période 37 a **deux chiffres**.

a) Justifier que $100 \times x = 37 + x$.

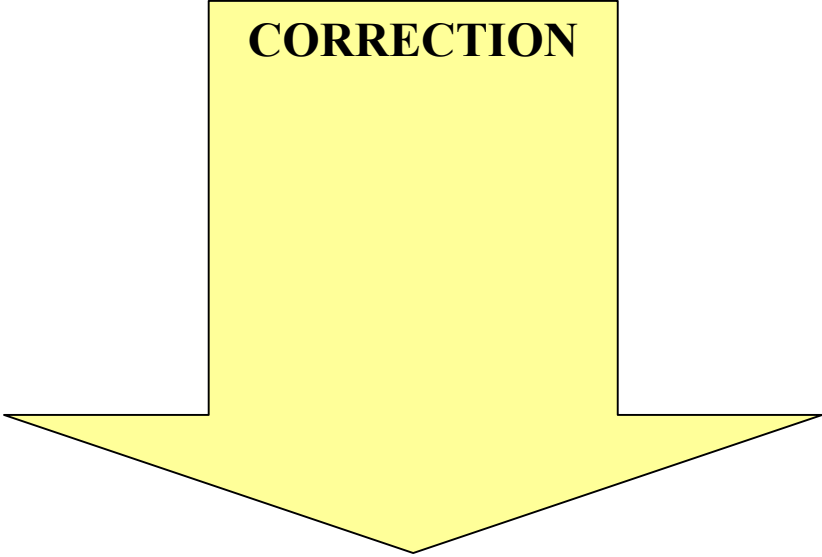
b) Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte de x en fraction.

Quelle est alors la nature de x ?

2° En procédant de la même façon, démontrer que $0,999999\dots = 1$.

3° a) Déterminer l'écriture fractionnaire du nombre $x = 0,123123 \overline{123} \dots$

b) En remarquant que $12,0909 \overline{09} \dots = 12 + 0,0909 \overline{09}$, déterminer l'écriture fractionnaire de $12,0909 \overline{09}$

**CORRECTION**

Exercice I

p est un nombre premier supérieur ou égal à 3 donc p est impair donc $p - 1$ et $p + 1$ sont pairs donc a et b sont entiers.

$$2^\circ a^2 - b^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + 2p + 1}{4} - \frac{p^2 - 2p + 1}{4} = \frac{p^2 + 2p + 1 - p^2 + 2p - 1}{4} = p$$

Variante :

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2}\right) = \frac{p+1+p-1}{2} \times \frac{p+1-p+1}{2} = \frac{2p}{2} \times \frac{2}{2} = p.$$

$$3^\circ \text{ Tout nombre premier } p > 3 \text{ s'écrit : } p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

Remarque $\frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2} = \frac{p+1-p+1}{2} = 1$ donc ces entiers sont consécutifs.

$$\frac{29+1}{2} = 15 \text{ et } \frac{29-1}{2} = 14. \text{ et } 15^2 - 14^2 = (15-14) \times (15+14) = 1 \times 29 = 29.$$

Exercice II

$1^\circ x = 0,3737 \overline{37} \dots$ a) $100x = 37,3737 \overline{37}$ et $37 + x = 37 + 0,3737 \overline{37}$ donc $100x = 37 + x$ b) $100x = 37 + x$ $\Leftrightarrow 100x - x = 37$ $\Leftrightarrow 99x = 37$ $x = \frac{37}{99}$ donc $x \in \mathbb{Q}$	$2^\circ x = 0,999999\dots$ $10x = 9,999999\dots = 9 + 0,999999\dots = 9 + x$ $10x = 9 + x$ $\Leftrightarrow 10x - x = 9$ $\Leftrightarrow 9x = 9$ $\Leftrightarrow x = 1$ donc $x \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
---	---

$$3^\circ x = 0,123123 \overline{123} \dots$$

On a : $1000x = 123,123123 \overline{123} \dots$ et $123 + x = 123 + 0,123123 \overline{123}$ donc $1000x = 123 + x$.

$$1000x = 123 + x \Leftrightarrow 999x = 123 \Leftrightarrow x = \frac{123}{999} \Leftrightarrow x = \frac{41}{333}$$

$$12,0909 \overline{09} \dots = 12 + 0,0909 \overline{09}.$$

On pose $x = 0,0909 \overline{09}$.

$$100x = 9,0909 \overline{09} = 9 + x \text{ donc } 99x = 9 \text{ donc } x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$$\text{et } 12,0909 \overline{09} = 12 + \frac{1}{11} = \frac{132+1}{11} = \frac{133}{11}$$