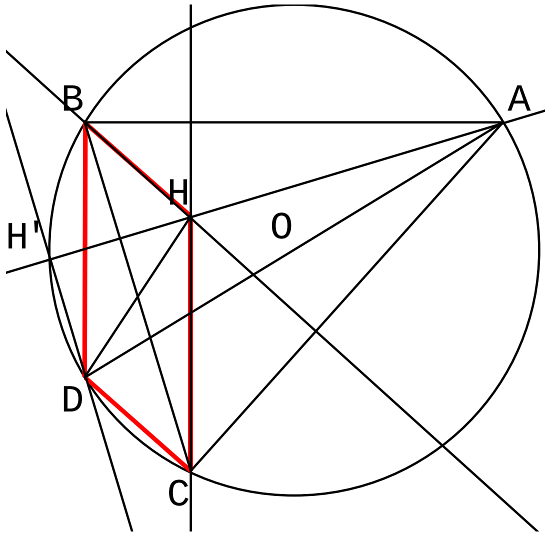

$\boxed{1}$ configurations du plan

ABC est un triangle . O est le centre de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$ et H son orthocentre. Le point D est tel que [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$.
1° Refaire une figure.
2° Montrer que les droites (BH) et (CD) sont parallèles ainsi que les droites (BD) et (CH).
3° a) Quelle est la nature du quadrilatère BHCD ? Justifier la réponse.
b) En déduire que [BC] et [HD] ont le même milieu.
4° Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).
a) Montrer que la droite (BC) est parallèle à (H'D).
b) En déduire que le point H' appartient au cercle

$\boxed{2}$ x et y sont des réels strictement positifs.

On considère les nombres $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

1° Vérifier que $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Développer a^3. En déduire que $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 + 3\,a$

De même démontrer que $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4\,a^2 + 2$.

2° Vérifier que $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = c^2 - 2$.

3° A partir du calcul de $a \times b \times c$, montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 - a\,b\,c = 4$.

4° Vérifier que $c - 2 = \frac{(x-y)^2}{x\,y}$. Exprimer $a - 2$ en fonction de x.

Montrer que a, b et c vérifient $a \geq 2$, $b \geq 2$ et $c \geq 2$.

1 configurations du plan ABC est un triangle . O est le centre de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$ et H son orthocentre. Le point D est tel que [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

2° Montrer que les droites (BH) et (CD) sont parallèles ainsi que les droites (BD) et (CH).

Dans le triangle ABC le point H est l'orthocentre donc (BH) est la hauteur issue de B donc (BH) $\perp$ (AC)

C est sur le cercle de diamètre [AD] donc ADC est rectangle en C donc (CD) $\perp$ (AC)

$\left.\begin{array}{l}(BH) \perp (AC)\\(CD) \perp (AC)\end{array}\right\}$ donc (BH) // (CD)

3° a) Quelle est la nature du quadrilatère BHCD ? Justifier la réponse.

De même (CH) // (BD) car

(CH) est hauteur du triangle ABC donc (CH)$\perp$(AB) et B est sur le cercle de diamètre [AD] donc (BD)$\perp$(AB)

Le quadrilatère BHCD a ses cotés deux à deux parallèles c'est donc un parallélogramme.

b) En déduire que [BC] et [HD] ont le même milieu.

BHCD est un parallélogramme donc ses diagonales, [BC] et [HD], se coupent en leur milieu

4° Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).

a) Montrer que la droite (BC) est parallèle à (H'D).

[BC] et [HD], se coupent en leur milieu donc la droite (BC) passe par le milieu de [DH]

H et H' sont symétriques par rapport à (BC) donc (BC) passe par le milieu de [HH']

Dans le triangle La droite (BC) passe par les milieux de côtés [HH'] et [DH] elle est donc parallèle au troisième côté donc (H'D) // (BC)

b) En déduire que le point H' appartient au cercle

H et H' sont symétriques par rapport à (BC) donc (HH') $\perp$ (BC)

$\left.\begin{array}{l}(H'D) \,//\, (BC)\\(BC) \perp (HH')\end{array}\right\}$ donc (H'D) $\perp$ (HH') donc (H'D) $\perp$ (AH') donc H' est sur le cercle de diamètre [AD]

---

2 x et y sont des réels strictement positifs.

On considère les nombres $a = x + \dfrac{1}{x}$, $b = y + \dfrac{1}{y}$ et $c = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

1° Vérifier que $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2$. $a^2 - 2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

Développer a^3. En déduire que $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = a^3 + 3\,a$

$$a^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right) \times \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + 2\,x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\,x + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\,a$$

De même démontrer que $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = a^4 - 4\,a^2 + 2$.

$$a^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^4 + 2\,x^2 + 1 + 2\,x^2 + 4 + \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\,x^2 + \frac{4}{x^2} + 6$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\,(a^2 - 2) + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\,a^2 - 2 \text{ donc } x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4\,a^2 + 2.$$

2° Vérifier que $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = c^2 - 2$. $\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{y^2}{x^2} + 2 \times \dfrac{y}{x} \times \dfrac{x}{y} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$ donc $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = c^2 - 2$.

3° A partir du calcul de $a \times b \times c$, montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 - a\,b\,c = 4$.

$$a \times b \times c = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \left(x\,y + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{x\,y}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = x^2 + y^2 + \frac{x^2}{y^2} + 1 + 1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

$= 2 + a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4$ donc $a^2 + b^2 + c^2 - a\,b\,c = 4$.

4° Vérifier que $c - 2 = \dfrac{(x - y)^2}{x\,y}$. Exprimer $a - 2$ en fonction de x. Montrer que $a \geq 2$, $b \geq 2$ et $c \geq 2$.

$\dfrac{(x - y)^2}{x\,y} = \dfrac{x^2 - 2\,xy + y^2}{x\,y} = \dfrac{x}{y} - 2 + \dfrac{y}{x} = c - 2$ $\quad a - 2 = x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{x^2 + 1 - 2\,x}{x} = \dfrac{(x - 1)^2}{x}$

$x \geq 0$ et $(x - 1)^2 \geq 0$ donc $a - 2 \geq 0$. de même $b \geq 2$

$x\,y \geq (x - y)^2 \geq 0$ donc $c - 2 \geq 0$ donc $c \geq 2$