Devoir maison n° 4 A rendre pour le 8 janvier

Première Partie : Valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$

Soit $a_0 = 2$

1° Calculer $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right)$ puis $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$, et ainsi de suite, jusqu'à a_5.

2° Recopier et compléter le tableau suivant :

	Valeur rationnelle exacte de a_n	Valeur décimale arrondie de a_n à 10^{-8}	Encadrement de $\sqrt{2}$
1	$\frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$	1,5	$\sqrt{2} \approx 1{,}5$ à 10^{-1} prés
2			$\sqrt{2} \approx$ à prés
3			$\sqrt{2} \approx$ à prés
4			$\sqrt{2} \approx$ à prés

Seconde Partie : Valeur décimale approchée de $\sqrt{p}$ avec p entier naturel.

Si on reprend l'algorithme précédent, avec : $a_0 = p$ et $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{p}{a_0}\right)$, puis $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{p}{a_1}\right) \cdots$, alors on peut démontrer qu'on obtient des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{p}$.

Calculer a_6 pour $p = 7$. Quelle est la précision de la valeur approchée a_6 de $\sqrt{7}$?

Cet algorithme fut établi par Héron d'Alexandrie.

CORRECTION

Première Partie : Valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ Soit $a_0 = 2$

1° Calculer $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right)$ puis $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$, et ainsi de suite, jusqu'à a_5.

$a_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $a_2 = \frac{17}{12} \approx 1{,}41\overline{6}$; $a_3 = \frac{577}{408} \approx 1{,}41421568627$; $a_4 = \frac{665857}{470832} \approx 1{,}41421356237$; $a_5 = \frac{886731088897}{627013566048} \approx 1{,}41421356237$

2° Recopier et compléter le tableau suivant :

	Valeur rationnelle exacte de a_n	Valeur décimale arrondie de a_n à 10^{-8}	Encadrement de $\sqrt{2}$
1	$\frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$	1,5	$\sqrt{2} \approx 1{,}5$ à 10^{-1} prés
2	$\frac{17}{12}$	1,41666667	$\sqrt{2} \approx 1{,}41666667$ à 10^{-2} prés
3	$\frac{577}{408}$	1,41421568	$\sqrt{2} \approx 1{,}41421568$ à 10^{-5} prés
4	$\frac{665857}{470832}$	1,41421356	$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237$ à 10^{-10} prés
5	$\frac{886731088897}{627013566048}$	1,41421356	$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237$ à 10^{-10} prés

Seconde Partie : Valeur décimale approchée de $\sqrt{p}$ avec p entier naturel.

Si on reprend l'algorithme précédent, avec : $a_0 = p$ et $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{p}{a_0}\right)$, puis $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{p}{a_1}\right)\cdots$, alors on peut démontrer qu'on obtient des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{p}$.

Calculer a_6 pour p = 7. Quelle est la précision de la valeur approchée a_6 de $\sqrt{7}$?

Cet algorithme fut établi par Héron d'Alexandrie.

$a_6 = \frac{104804696428033056657448577}{39612451854313553433195392} \approx 2{,}64575131106$

$\sqrt{7} \approx 2{,}64575131106$

La précision maximum de la calculatrice est atteinte.

Remarque

$a_5 = \frac{7238946623297}{2736064645568} \approx 2{,}64575131111$ précision de 10^{-9}

$a_4 = \frac{1902497}{719072} \approx 2{,}64576704419$ précision de 10^{-4}

$a_3 = \frac{977}{368} \approx 2{,}65489130435$ précision de 10^{-0}

$a_2 = \frac{23}{8} \approx 2{,}875$ précision de 1

$a_1 = 4$ précision de 2