Nom : Durée : 2h Mardi 9 mars 2004
Prénom :
Classe :

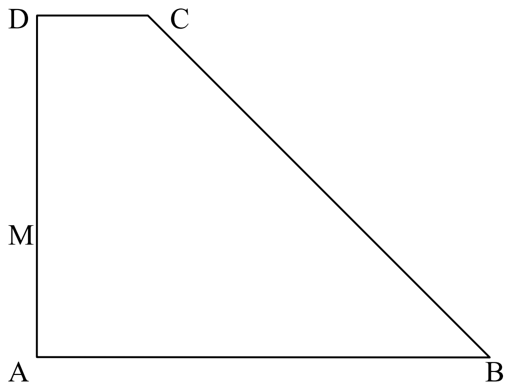
Devoir commun de seconde
Mathématiques

La clarté du raisonnement et de la rédaction comptera pour une part importante dans la note finale.

Exercice 1 (6 points)

ABCD est un trapèze rectangle en A tel que (AB) // (DC), AB = 8, AD = 6, DC = 2 .
M est un point du segment [AD].
On découpe le trapèze en 3 triangles, T_1 est le triangle ABM ; T_2 est le triangle DCM et T_3 est le triangle BCM.

On pose AM= x et on note f_1 ,f_2 ,f_3 les fonctions qui associent à x les aires respectives de T_1, de T_2 et de T_3.



1°)a) Déterminer l'intervalle de définition des fonctions f_1 ,f_2 et f_3.
b) Calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
c) Montrer que : $f_3(x) = 24 - 3x$.

2°) Tracer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 sur l'intervalle [0 ; 6].

3°)a) Les aires des triangles T_1 et T_2 peuvent-elles être égales ? Justifier votre réponse.
b) Les aires des triangles T_2 et T_3 peuvent-elles être égales ? Justifier votre réponse.
c) Montrer qu'il existe une position du point M pour laquelle l'aire de T_3 est égale à la somme des aires des triangles T_1 et T_2. Préciser cette position.

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -(x-5)^2 + 25$ (**forme 1).**
1°)Montrer que : $f(x) = -x^2 + 10x$ (**forme 2**).

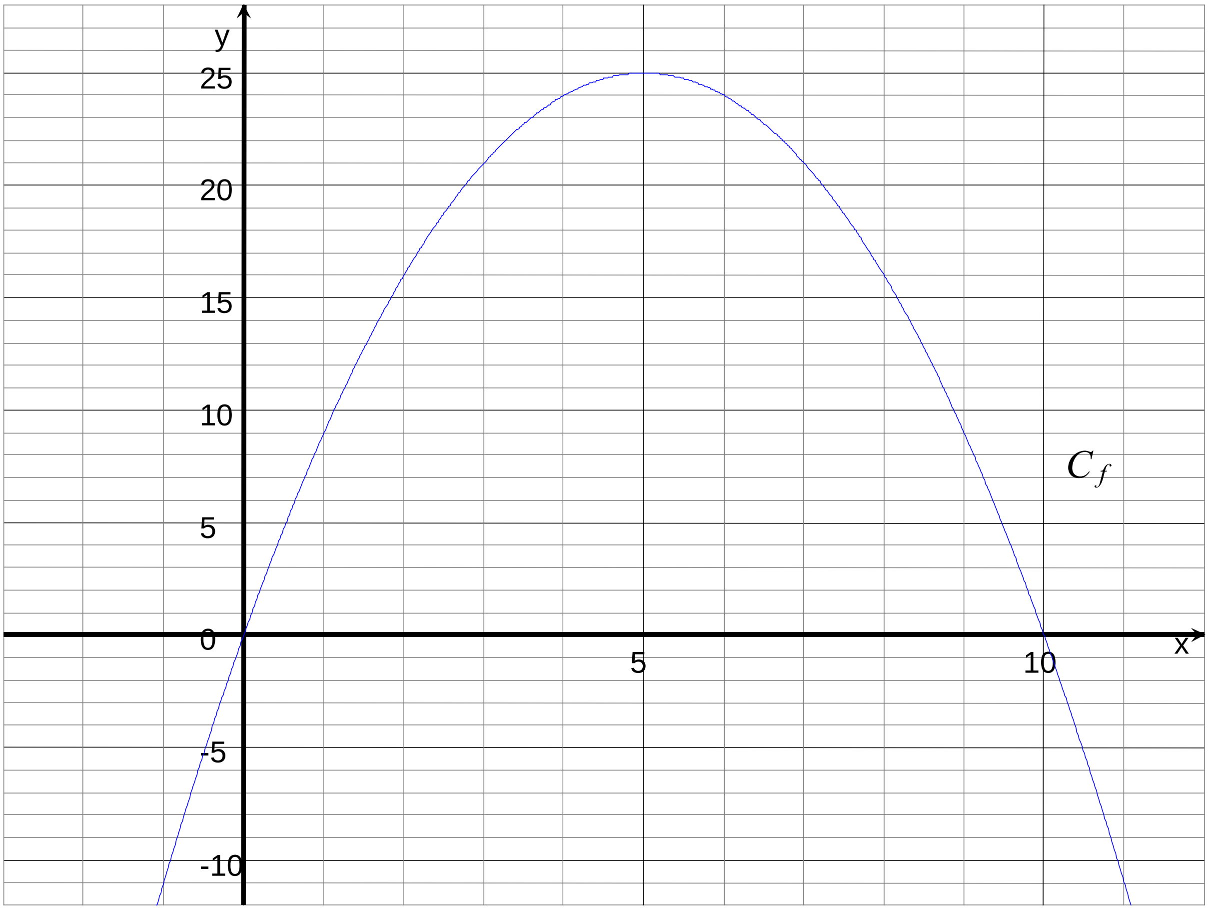
2°)Factoriser $f(x)$. Ce résultat sera la **forme 3.**

3°)En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes:

a) Calculer l'image de $\sqrt{3}$ par f.
b) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.
c) Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 0$.
d) Montrer que 25 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

4°) On considère ci-dessous la représentation graphique de f, notée C_f, dans un repère orthogonal (O; I; J).

Représentation de f



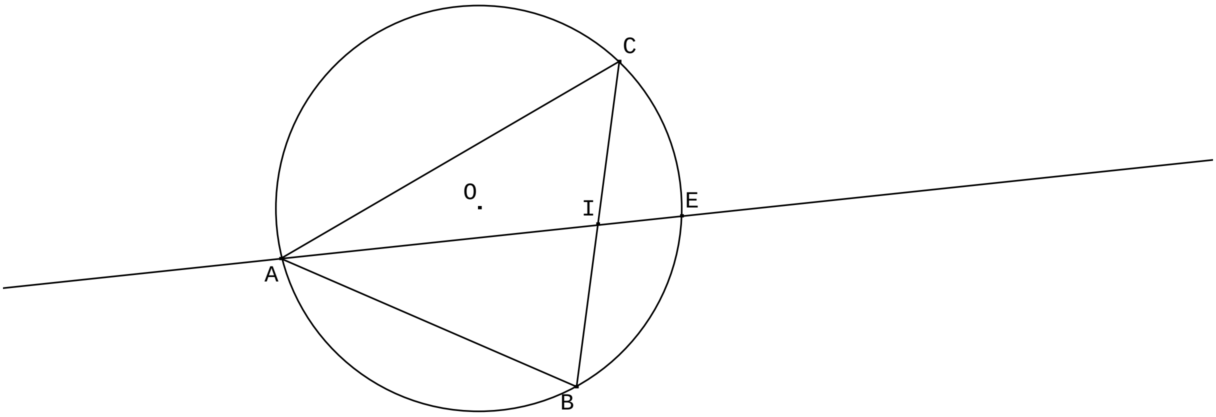
a) Résoudre graphiquement : $f(x) = 9$.

b) Résoudre graphiquement : $f(x) < 16$.

c) Déterminer, grâce au graphique, le tableau de variation de f .

Exercice 3 (5 points)

ABC est un triangle quelconque ; ζ est son cercle circonscrit de centre O ; I est le milieu de [BC] et (AI) est la médiane issue de A. Elle coupe ζ en E.
P est le projeté orthogonal de B sur (AI) et Q est le projeté orthogonal de C sur (AI).



1°) Compléter la figure.

2°)a) Montrer que les triangles BIP et CIQ sont isométriques.

b) En déduire : BP = CQ.

3°) Montrer que les triangles ABI et ICE sont semblables.

On désigne par k le rapport $\frac{CE}{AB}$.

4°) On suppose dans cette question que k = 1.

a) Montrer que les triangles ABI et ICE sont isométriques.

b) Montrer alors que le point I est confondu avec le point O.
En déduire la nature de ABC.

5°) On suppose que le triangle ABC est équilatéral.

a) Calculer k.

b) Montrer que aire(ABC) = 6 aire(EIC)

Nom : Durée : 2h Mardi 9 mars 2004
Prénom :
Classe :

Exercice 4 (5 points)

Une entreprise leader sur le marché du disque dur informatique teste aléatoirement la durée de vie de ses disques durs en prenant au hasard sur les chaînes de montage 1000 disques en une semaine.
Les résultats obtenus ci-dessous indiquent le nombre de centaines d'heures d'utilisation.
On considère que la répartition est régulière dans chaque classe.

Centaines d'heures	[0 ; 10[	[10 ; 30 [	[30 ; 50 [	[50 ; 70 [	[70 ; 100 [
Effectif	250	30	50	430	240
Fréquence					
Fréquence cumulée croissante					

1°)a) Quelle est la population étudiée ?

Quelle est la variable (ou le caractère) étudiée ?

Quelle est la nature de cette variable ?

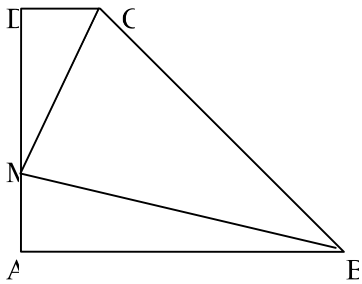
b) Compléter le tableau ci-dessus.

2°)a) Indiquer l'étendue et la classe modale de cette série statistique.
b) Calculer le nombre moyen d'heures de vie des disques et donner la classe contenant la médiane de cette série.

3°) Peut-on affirmer qu'au moins 25% des disques ont une durée de vie en centaines d'heure comprise entre 30 et 70 ?
Justifier votre réponse.

Exercice 1 (6 points) ABCD est un trapèze rectangle en A tel que (AB) // (DC), AB = 8, AD = 6, DC = 2 .M est un point du segment [AD]. On découpe le trapèze en 3 triangles, T_1 est le triangle ABM ; T_2 est le triangle DCM et T_3 est le triangle BCM.

On pose AM= x et on note f_1 , f_2 , f_3 les fonctions qui associent à x les aires respectives de T_1, de T_2 et de T_3.



1°) a) Déterminer l'intervalle de définition des fonctions f_1 , f_2 et f_3.

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = [\,0\,,\,6\,]$

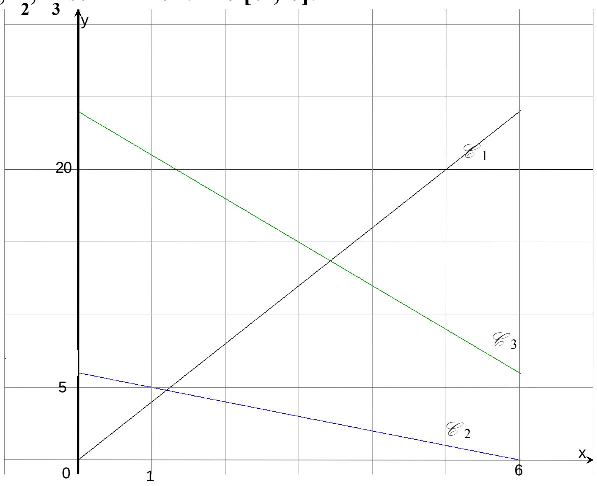
b) Calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

$f_1(x) = \dfrac{1}{2}\,AM \times AB = 4\,x \quad f_2(x) = \dfrac{1}{2}\,DC \times CM = 6 - x$

c) Montrer que : $f_3(x) = 24 - 3\,x$ $\mathcal{A}'(ABCD) = \dfrac{1}{2}(DC + AB) \times AD = 30$

$f_3(x) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(ABM) - \mathcal{A}(DCM) = 30 - 4\,x - (6 - x) = 24 - 3\,x.$

2°) Tracer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 sur l'intervalle [0 ; 6].



3°) a) Les aires des triangles T_1 et T_2 peuvent-elles être égales ? Justifier votre réponse.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont secantes. L'abscisse de leur point d'intersection correspond à la valeur de AM tel que les aires de T_1 et T_2 sont égales.

b) Les aires des triangles T_2 et T_3 peuvent-elles être égales ? Justifier votre réponse.

$\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_2$ ne sont pas secantes donc les aires de T_3 et T_2 ne sont jamais égales.

d) Montrer qu'il existe une position du point M pour laquelle l'aire de T_3 est égale à la somme des aires des triangles T_1 et T_2. Préciser cette position.

$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) \Leftrightarrow 24 - 3\,x = 4\,x + 6 - x$

$\Leftrightarrow 24 - 6 = 6\,x \Leftrightarrow x = 3$. M est alors au milieu de [AD]

Exercice 2 (6 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -(x-5)^2 + 25$ (forme 1).

1°) Montrer que : $f(x) = -x^2 + 10x$ (forme 2).

$-(x-5)^2 + 25 = -(x^2 - 10\,x + 25) + 25 = -x^2 + 10\,x - 25 + 25 = -x^2 + 10\,x = f(x)$ cqfd

2°) Factoriser f(x). Ce résultat sera la forme 3.

$f(x) = -x^2 + 10\,x = x\,(10 - x)$

3°) En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes: a) Calculer l'image de $\sqrt{3}$ par f.

$f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^2 + 10\sqrt{3} = -3 + 10\sqrt{3}$. L'image de $\sqrt{3}$ par f est $-3 + 10\sqrt{3}$

b) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\,(10 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 10$. Les antécédent de 0 par f sont 0 et 10.

c) Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
x		–	0	+		+	
$10 - x$		+		+	0	–	
f(x)		–	0	+	0	–	

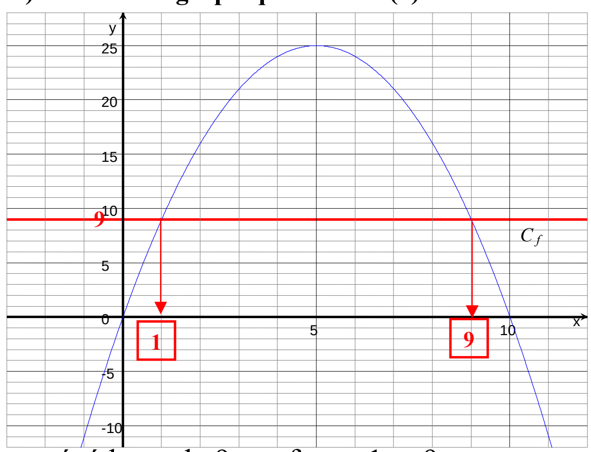
d) Montrer que 25 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 25 - (x-5)^2 \geq 25$ car pour tout réel x, $(x-5)^2 \geq 0$.

$f(5) = 25$ donc 25 est bien le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

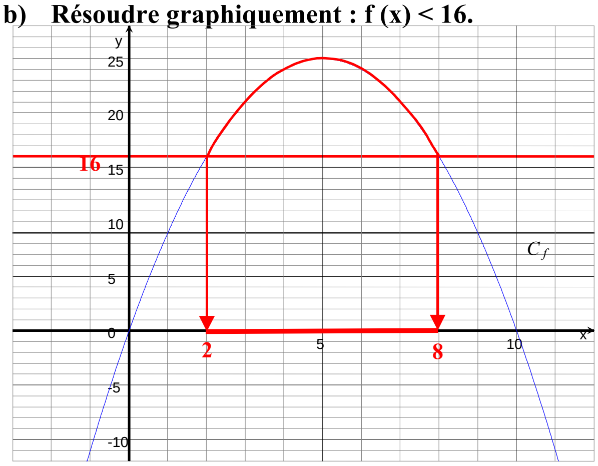
4°) On considère ci-dessous la représentation graphique de f, notée C_f , dans un repère orthogonal (O; I; J).

a) Résoudre graphiquement : $f(x) = 9$.



Les antécédents de 9 par f sont 1 et 9.

b) Résoudre graphiquement : $f(x) < 16$.

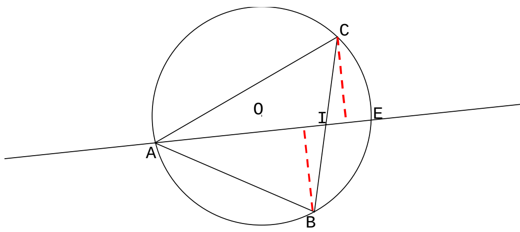


S =] 2 , 8 [

Déterminer, grâce au graphique, le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f	↗	25	↘

Exercice 3 (5 points) ABC est un triangle quelconque ; ζ est son cercle circonscrit de centre O ; I est le milieu de [BC] et (AI) est la médiane issue de A. Elle coupe ζ en E. P est le projeté orthogonal de B sur (AI) et Q est le projeté orthogonal de C sur (AI). 1°) Compléter la figure.



2°) a) Montrer que les triangles BIP et CIQ sont isométriques.

les angles $\widehat{BIP}$ et $\widehat{CIQ}$ sont opposés par le sommet donc de même mesure.

les angles $\widehat{BPI}$ et $\widehat{CQI}$ sont droits donc de même mesure.

dans les triangles BPI et CQI on peut donc dire que $\widehat{IBP} = \widehat{ICQ}$

I est le milieu de [BC] donc BI = IC

on a donc $\left.\begin{matrix}\widehat{IBP} = \widehat{ICQ}\\ \widehat{BIP} = \widehat{CIQ}\\ BI = IC\end{matrix}\right\}$ les triangles $\begin{matrix}BIP\\CIQ\end{matrix}$ ont en commun la longueur d'un côté et les mesures des angles qui lui sont adjacents ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{matrix}\text{B et C sont homologues}\\ \text{I et I sont homologues}\\ \text{P et Q sont homologues}\end{matrix}\right.$

b) En déduire : BP = CQ.

les triangles $\begin{matrix}BIP\\CIQ\end{matrix}$ sont isométriques donc les longueurs de leurs côtés sont égales donc BP = CQ.

3°) Montrer que les triangles ABI et ICE sont semblables. On désigne par k le rapport $\frac{CE}{AB}$.

dans le cercles ζ les angles inscrit $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BCE}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BE}$ ils sont donc de même mesure et $\widehat{BAI} = \widehat{BCE}$

dans le cercles ζ les angles inscrit $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$ ils sont donc de même mesure et $\widehat{ABI} = \widehat{CEI}$

les triangles $\begin{matrix}ABI\\CEI\end{matrix}$ ont en commun les mesures de deux angles ils sont donc semblables et

$\left\{\begin{matrix}\text{A et C sont homologues}\\ \text{I et I sont homologues}\\ \text{B et E sont homologues}\end{matrix}\right.$ $k = \frac{CI}{AI} = \frac{CE}{AB} = \frac{IE}{IB}$

4°) On suppose dans cette question que k = 1. a) Montrer que les triangles ABI et ICE sont isométriques.

Si k = 1 alors CI = AI et CE = AB et IE = IB et donc les triangles $\begin{matrix}ABI\\CEI\end{matrix}$ ont en commun les longueurs de leurs trois côtés ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{matrix}\text{A et C sont homologues}\\ \text{I et I sont homologues}\\ \text{B et E sont homologues}\end{matrix}\right.$

b) Montrer alors que le point I est confondu avec le point O. En déduire la nature de ABC.

On a : IA = IC et comme I est le milieu de [BC] IC = IB donc IA = IB = IC donc I est le centre du cerclecirconscrit à A, B et c c'est à dire le cercles ζ . On a bien I = O et ABC est alors rectangle en A. ([BC) est un diamétredu cercles ζ)

5°) On suppose que le triangle ABC est équilatéral. a) Calculer k.

Si ABC est équilatéral alors $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ et $CI = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$ et alors on a : $k = \frac{CI}{AI} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \frac{AB}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}\,AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{3}{\sqrt{3}}$

b) Montrer que aire(ABC) = 6 aire(EIC)

$\frac{\text{aire(EIC)}}{\text{aire (ABI)}} = k^2 = \frac{1}{3}$ donc aire (ABI) = 3 aire (EIC).

aire (ABC) $= \frac{1}{2}BC \times AH = \frac{1}{2}2\,BI \times AH$ où H est le projeté orthogonal de A sur –BC).

Donc aire (ABC) = 2 × aire ABI = 6 × aire (EIC).

Exercice 4 (5 points) Une entreprise leader sur le marché du disque dur informatique teste aléatoirement la durée de vie de ses disques durs en prenant au hasard sur les chaînes de montage 1000 disques en une semaine. Les résultats obtenus ci-dessous indiquent le nombre de centaines d'heures d'utilisation. On considère que la répartition est régulière dans chaque classe.

Centaines d'heures	[0 ; 10[	[10 ; 30 [	[30 ; 50 [	**[50 ; 70 [**	[70 ; 100 [
Effectif	250	30	50	**430**	240
Fréquence	0,25	0,03	0,05	**0,43**	0,24
Fréquence cumulée croissante	0,25	0,28	0,33	**0,76**	1

1°) a) Quelle est la population étudiée ?

Les disques durs fabriqués qur une chaine de montage.

Quelle est la variable (ou le caractère) étudiée ?

La duirée de vie de ces disques durs.

Quelle est la nature de cette variable ?

Quantitatif discret

c) Compléter le tableau ci-dessus.

2°) a) Indiquer l'étendue et la classe modale de cette série statistique.

Etendue : 100 – 0 = 100

Classe modale : [50 , 70 [

b) Calculer le nombre moyen d'heures de vie des disques et donner la classe contenant la médiane de cette série.

$5 \times 0{,}25 + 20 \times 0{,}0\ 3 + 40 \times 0{,}05 + 60 \times 0{,}43 + 85 \times 0{,}24 = 50{,}05$

$0{,}33 < 0{,}5 < 0{,}76$ donc la classe médiane est [50 , 70]

3°) Peut-on affirmer qu'au moins 25% des disques ont une durée de vie en centaines d'heure comprise entre 30 et 70 ? Justifier votre réponse

50 + 430 = 480 disques ont une durée de vie comprise entre 30 et 70 heures et $\frac{480}{1000} = 0{,}48 > 0{,}25$ on peut donc dire que plus de 25 % de disques ont une durée de vie comprise netre 30 et 70 haures.

.