Nom : **Durée : 2h** **Jeudi 27 janvier 2005**
Classe :

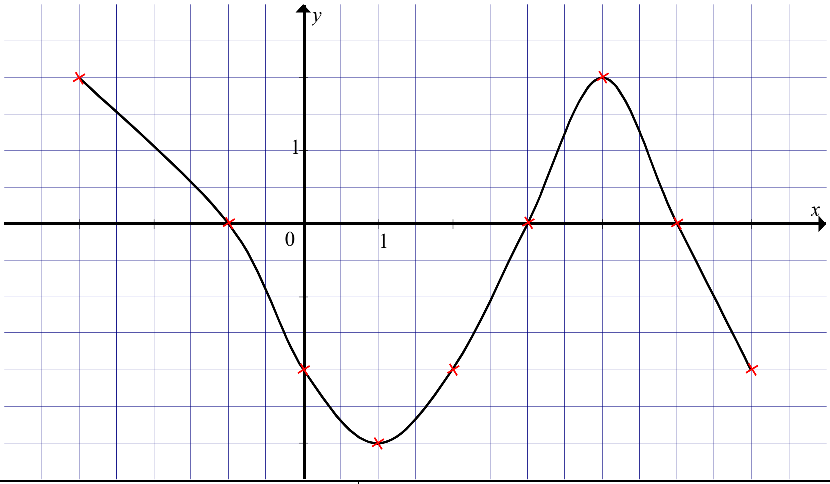
Devoir commun de seconde Mathématiques

La clarté du raisonnement et de la rédaction comptera pour une part importante dans la note finale.

<u>Exercice 1</u> (4 points)
Pour cet exercice aucune justification n'est demandée. Vous écrirez lisiblement dans chaque case : « vrai » si vous pensez que l'affirmation est exacte ; « faux » si vous pensez que cette affirmation est inexacte. Aucune mention dans la case correspond à une absence de réponse.
Une réponse exacte rapporte un certain nombre de points ;une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de ce nombre de points ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

<u>Partie A</u> :

Dans cette partie la fonction f est représentée par la courbe ci-contre.



1	L'ensemble de définition de la fonction f est : $[-3 ; 2]$	La fonction f est définie sur $[-3 ; 6]$	$\sqrt{2}$ a une seule image par f
2	L'image de -3 par f est 1	0 a pour image -2 par f	f(5) est l'image de 0 par f
3	-2 admet exactement deux antécédents par f.	1 est un antécédent de -2 par f	0,5 admet trois antécédents par f
4	L'ensemble des solutions de $f(x) = -2$ est l'intervalle $[-3 ; 4]$	L'équation $f(x)=0$ admet trois solutions : -1 ; 3 ; 5	$f(0) > f(1)$
5	L'ensemble des solutions de $f(x) > 0$ est l'intervalle $]3 ; 5[$	Si $x \in [-3 ; -1]$, alors $f(x) \geq 0$	Si $4 \leq x \leq 6$, alors $-2 \leq f(x) \leq 2$

<u>Partie B :</u>
Dans cette partie les fonctions g et h sont définies par : $g(x)= -2x^2 + 3x - 1$ et $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

6	-1 a pour image 6 par g	Le point $A(0 ; -1)$ est sur la courbe de g	-3 est un antécédent de 2 par g
7	-1 a un seul antécédent par g	L'image de 0 par h est 1	L'équation $h(x) = 1$ admet une seule solution.
8	L'image de -1 par h est $\sqrt{2}$	-2 n'a pas d'image par h	-3 n'a pas d'antécédent par h

<u>Exercice 2</u> :(5 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x-3)^2 - 2(x+4)(3-x)$

1) Développer f(x).
2) Montrer que $f(x) = (x-3)(3x+5)$.
3) En choisissant la forme la plus adaptée, résoudre dans ℝ:

a. $f(x) = -15$.

b. $f(x) > 0$.

4) Soit la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = x^2 - 6x + 9$.

a. Factoriser g(x)

b. Résoudre dans □ les inéquations : $f(x) < g(x)$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 3$.

<u>Exercice 3</u> : (3,5 points)

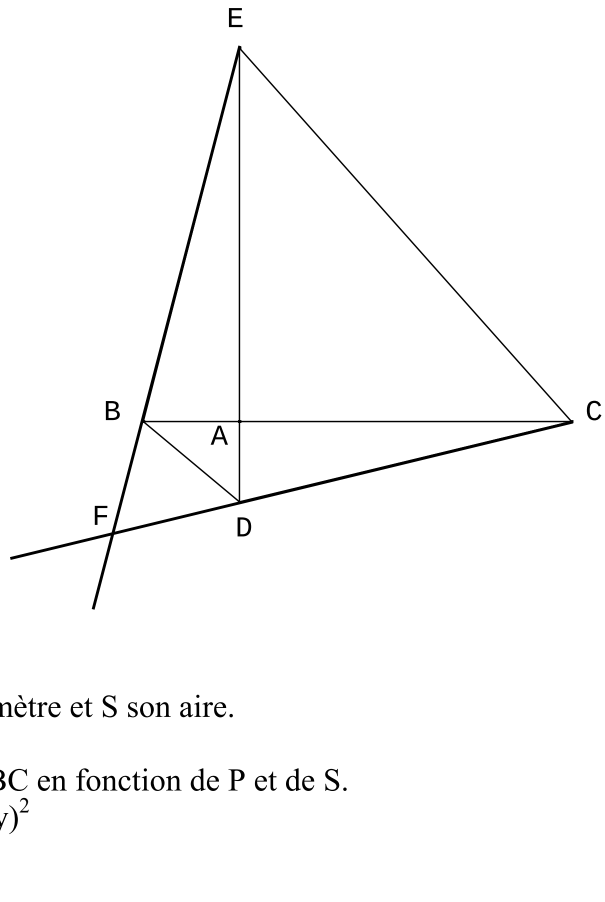
Soit un parallélogramme ABCD. On appelle I le milieu du segment [DC].

1) Construire les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$
2) a- Démontrer que $\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
3) b- En déduire que les droites (MN) et (BI) sont parallèles.
4) a- Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b- En déduire que les points C , M et N sont alignés.

<u>Exercice 4</u> :(4,5 points)

[BC] et [DE] sont deux segments perpendiculaires d'intersection A .
AB = 8 ; AD = 6; AC = 27 ; AE = 36 (voir figure ci-contre)



1) Démontrer que les triangles ABE et ADC sont semblables.
2) Les droites (CD) et (EB) se coupent en F .

a) Démontrer que les triangles DFE et BFC sont semblables.

b) Montrer que : $\dfrac{\text{aire(DFE)}}{\text{aire(BFC)}} = 1{,}44$.

3) a) Calculer les aires des triangles BCD et EBD.

b) On note x l'aire du triangle BFD. Démontrer que x est solution de l'équation : $\dfrac{x+168}{x+105} = 1{,}44$.

Calculer alors x .

<u>Exercice 5</u> : (3 points)

ABC désigne un triangle rectangle en A. On appelle P son périmètre et S son aire.
On pose AB = x et AC = y et on suppose que x > y.

1) On se propose de calculer l'hypoténuse h du triangle ABC en fonction de P et de S.

a. Montrer que $x + y = P - h$ et que $h^2 + 4S=(x+y)^2$
(on pourra exprimer S en fonction de x et y).

b. En déduire que : $h=\dfrac{P^2-4S}{2P}$.

2) Dans cette question, on suppose que $P = 3 + \sqrt{5}$ et S = 1 (l'unité est le cm) et on utilisera des résultats de la première question.

a. Calculer h. On donnera le résultat sans racine carrée au dénominateur.

b. Montrer que $(x-y)^2 = 1$.

c. Calculer alors x et y.

La clarté du raisonnement et de la rédaction comptera pour une part importante dans la note finale.

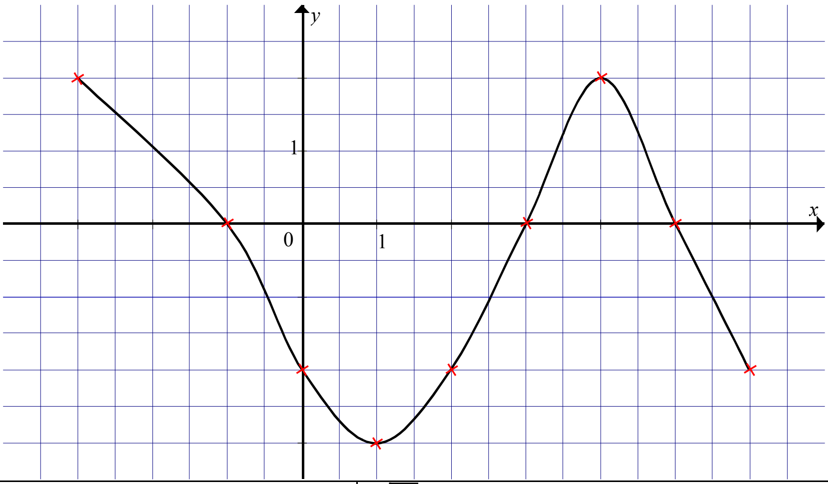
<u>Exercice 1</u> (4 points)

Pour cet exercice aucune justification n'est demandée. Vous écrirez lisiblement dans chaque case : « vrai » si vous pensez que l'affirmation est exacte ; « faux » si vous pensez que cette affirmation est inexacte. Aucune mention dans la case correspond à une absence de réponse.

Une réponse exacte rapporte un certain nombre de points ;une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de ce nombre de points ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

<u>Partie A</u> :

Dans cette partie la fonction f est représentée par la courbe ci-contre.



1	L'ensemble de définition de la fonction f est : [–3 ; 2] **F**	La fonction f est définie sur [–3 ; 6] **V**	$\sqrt{2}$ a une seule image par f **V**
2	L'image de – 3 par f est 1 **F**	0 a pour image – 2 par f **V**	f(5) est l'image de 0 par f **F**
3	– 2 admet exactement deux antécédents par f. **F**	1 est un antécédent de –2 par f **F**	0,5 admet trois antécédents par f **V**
4	L'ensemble des solutions de f(x) = –2 est l'intervalle [–3 ; 4] **F**	L'équation f(x)=0 admet trois solutions : – 1 ; 3 ; 5 **V**	f(0) > f(1) **V**
5	L'ensemble des solutions de f(x) > 0 est l'intervalle] 3 ; 5 [**F**	Si $x \in [-3 ; -1]$, alors $f(x) \geq 0$ **V**	Si $4 \leq x \leq 6$, alors $-2 \leq f(x) \leq 2$ **V**

<u>Partie B :</u>

Dans cette partie les fonctions g et h sont définies par : $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$ et $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

6	– 1 a pour image 6 par g **V**	Le point A(0 ; –1) est sur la courbe de g **V**	– 3 est un antécédent de 2 par g **F**
7	– 1 a un seul antécédent par g **F**	L'image de 0 par h est 1 **V**	L'équation h(x) = 1 admet une seule solution. **V**
8	L'image de – 1 par h est $\sqrt{2}$ **V**	– 2 n'a pas d'image par h **F**	– 3 n'a pas d'antécédent par h **V**

Exercice 2 :(5 points)

1° $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 2(3x - x^2 + 12 - 4x) = x^2 - 6x + 9 - 6x + 2x^2 - 24 + 8x = \boxed{3x^2 - 4x - 15}$.

2° $f(x) = (x-3)^2 + 2(x+4)(x-3) = (x-3)((x-3) + 2(x+4))$
$= (x-3)(x - 3 + 2x + 8)$
$= \boxed{(x-3)(3x+5)}$

3° a) $f(x) = -15 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 15 = -15$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0$
$\Leftrightarrow x(3x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{4}{3}$

$\boxed{S = \left\{0\,,\dfrac{4}{3}\right\}}$

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-3)(3x+5) > 0$.

$\boxed{S =]-\infty\,, -5/3\,[\cup]\,3\,, +\infty\,[}$

x	– ∞	–5/3	3 + ∞
x– 3	–	0 +	+ +
3 x + 5	–	–	0 +
f(x)	+	0 –	0 +

4° a) $g(x) = (x-3)^2$

b) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow (x-3)(3x+5) < (x-3)^2$
$\Leftrightarrow (x-3)(3x+5) - (x-3)^2 < 0$
$\Leftrightarrow (x-3)[(3x+5) - (x-3)] < 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(2x+8) < 0$

$\boxed{S =]-4\,, 3\,[}$

x	– ∞	– 4	3 + ∞
x – 3	–	–	0 +
2 x + 8	–	0 +	+
	+	0 –	0 +

c) $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 3 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(3x+5)}{(x-3)^2} < 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+5}{x-3} - 3 < 0$

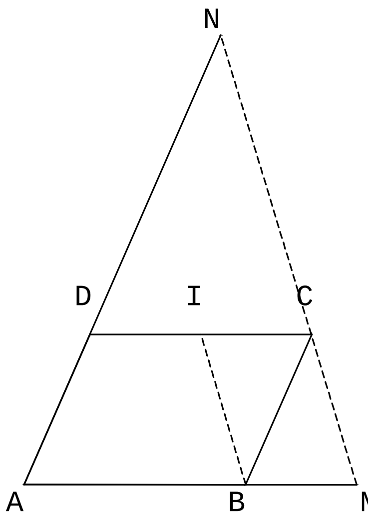
$\Leftrightarrow \dfrac{3x + 5 - 3(x-3)}{x-3} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{14}{x-3} < 0$

$\boxed{S =]-\infty\,, 3\,[}$

x	– ∞	3	+ ∞
x – 3	–	0	+
	+	‖	–

Exercice 3 : (3,5 points)



2° a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \boxed{-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \boxed{-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

b) $\boxed{\overrightarrow{MN} = 3\,\overrightarrow{BI}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires

Les droites (MN) et (BI) sont donc parallèles.

3° a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \boxed{\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{AD} = \boxed{-\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}}$

b) $\boxed{\overrightarrow{CN} = -2\,\overrightarrow{CN}.}$ les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires.

Les points C, M et N sont donc alignés.

Exercice 4 : (4,5 points)
1° ABE et ADC sont semblables :
[DE] et [BC] sont perpendiculaires en A , donc on a : $\widehat{BAE} = \widehat{ADC}$ (même mesure 90° ,ou angles opposés par le sommet) .
$\frac{AB}{AD} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$ donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$.
Les triangles ABE et ADC ont « un angle égal compris entre deux côtés respectivement proportionnels », ils sont donc semblables.

2° a) DFE et BFC sont semblables :
(EB) et (CD) se coupent en F , on a donc : $\widehat{DFE} = \widehat{CFB}$
Les triangles ABE et ADC sont semblables(cf 1°) , leurs angles sont donc égaux deux à deux, d'où :
$\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$ donc $\widehat{DEF} = \widehat{BCF}$
Les triangles DFE et BFC ont alors deux angles égaux deux à deux , ils sont donc semblables.

b) Rapport ds aires :
Les triangles DFE et BFC sont semblables, les longueurs des côtés sont donc deux à deux proportionnelles.
Soit k le rapport de similitude qui transforme le triangle BFC en DFE.On a $k=\frac{DE}{BC}$.
Calculons DE : $A \in [DE]$,donc DE = AD + AE d'où DE = 6 + 36 = 42.
Calculons BC : $A \in [BC]$,donc BC = AB + AC d'où BC = 8 + 27 = 35.
On obtient alors $k = \frac{42}{35}$ d'où $k = \frac{6}{5} = 1,2$.
On peut alors écrire aire(DFE) = $1,2^2$ aire(BFC), ou encore $\frac{\text{Aire(DFE)}}{\text{aire(BFC)}} = 1,44$.

3°) a) aire(BCD) = $\frac{BC \times AD}{2}$ d'où aire(BCD) = $\frac{(8+27)\times 6}{2}$ d'où aire(BCD) = 105.
Aire(EBD) = $\frac{ED \times AB}{2}$ d'où aire(EBD) = $\frac{8 \times (6+36)}{2}$ d'où aire(EBD) = 168.

b) On note aire(BFD) = x.
aire(BFC)=aire(BFD) + aire(BCD) d'où aire(BFC)=x + 105.
Aire(DFE)=aire(BFD) + aire(BDE) d'où aire (DFE) = x + 168.
On sait que : $\frac{\text{Aire(DFE)}}{\text{aire(BFC)}} = 1,44$
On a donc $\frac{x+168}{x+105} = 1,44$

$x > 0$.
$\frac{x+168}{x+105} = 1,44 \Leftrightarrow x + 168 = 1,44\,(x + 105)$
$\Leftrightarrow 0,44\,x = 16,8$
$\Leftrightarrow x = \frac{16,8}{0,44}$
$\Leftrightarrow x = \frac{420}{11}$.
($x \approx 38,18$).

<u>Exercice 5</u> : (3 points)

1° a) $P = x + y + h$ donc $\boxed{\mathbf{x + y = P - h.}}$

ABC rectangle en A donc $h^2 = x^2 + y^2$ et $h^2 + 4\ S = x^2 + y^2 + 4 \times \dfrac{x\ y}{2} = x^2 + y^2 + 2\ x\ y = (x + y)^2$

b) $h^2 + 4\ S = (P - h)^2$ donc $h^2 + 4\ S = P^2 - 2\ P\ h + h^2$ donc $2\ P\ h = P^2 - 4\ S$ donc $\boxed{\mathbf{h = \dfrac{P^2 - 4\ S}{2\ P}}}$

3° a) $P = 3 + \sqrt{5}$ et $S = 1$ donc $h = \dfrac{(3 + \sqrt{5}\,)^2 - 4 \times 1}{2 \times (3 + \sqrt{5}\,)} = \dfrac{9 + 6\sqrt{5} + 5 - 4}{6 + 2\sqrt{5}} = \dfrac{10 + 6\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} = \boxed{\mathbf{\sqrt{5}}}$

b) $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2\ x\ y = h^2 - 2 \times 2 \times S = 5 - 4 = 1$

c) ‘$x - y)^2 = 1$ et $x > y$ donc $x - y = 1$. On a : $x + y = P - h = 3 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}}$$