Nom: **Durée : 2 heures** **Mardi 14 mars 2006**
Prénom :

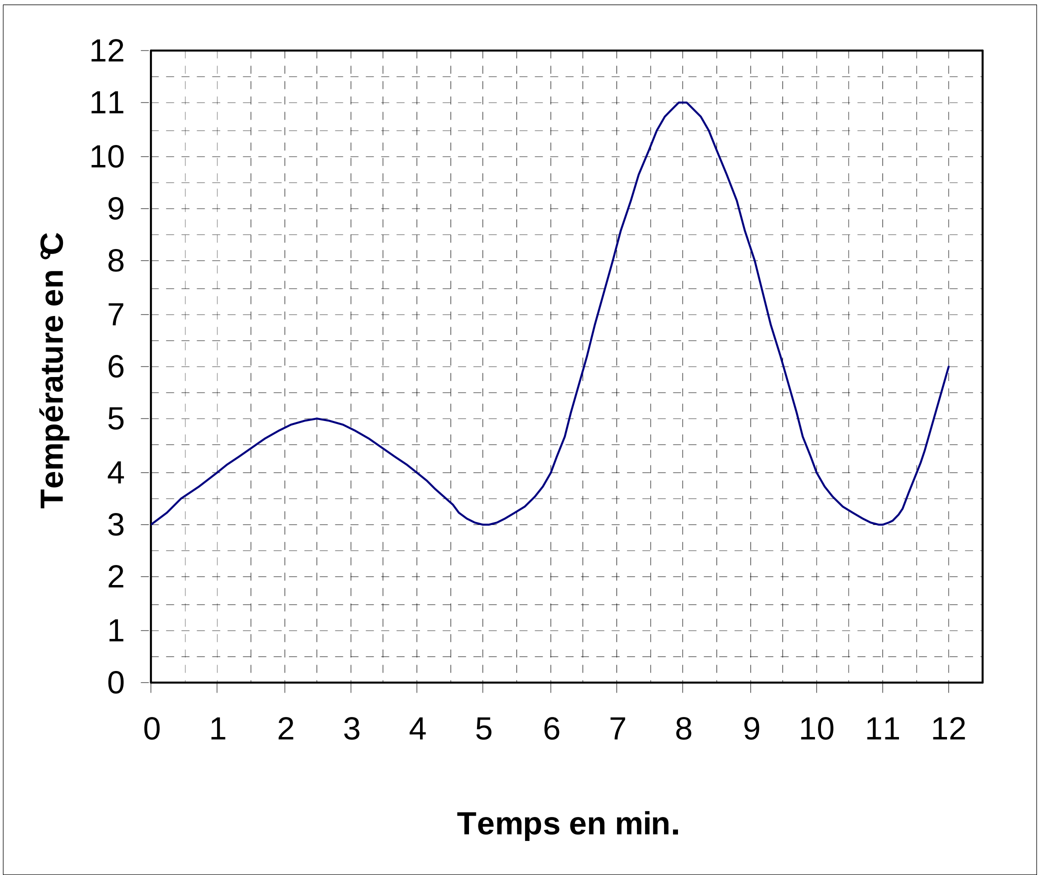
Devoir commun de seconde
Mathématiques

Exercice 1:
Un laboratoire réalise des expériences de relevés de température de différentes matières. Le graphique ci-dessous est le résultat d'une expérience où x est le temps en min et f(x) la température en °C. La courbe représentative de la fonction f pour x variant dans [0 ; 12] est appelée $\mathscr{C}_f$ et est représentée sur le graphique ci-dessous.

1 a) Quelle est la température relevée au bout de 8 minutes ?
b) Déterminer l'image de 6 par f.
c) Déterminer les antécédents de 4 par f.

2. a) Sur quel intervalle de temps, la température est-elle strictement supérieure à 6 °C ?
b) Résoudre $f(x) \leq 4$ et expliquer par une phrase sa signification dans l'expérience.

3. a) Construire le tableau de variations de f pour x appartenant à [0 ; 12].
b) Déterminer le maximum et le minimum de f sur [0 ; 12].



Exercice 2 : (5,25 points)

1.Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

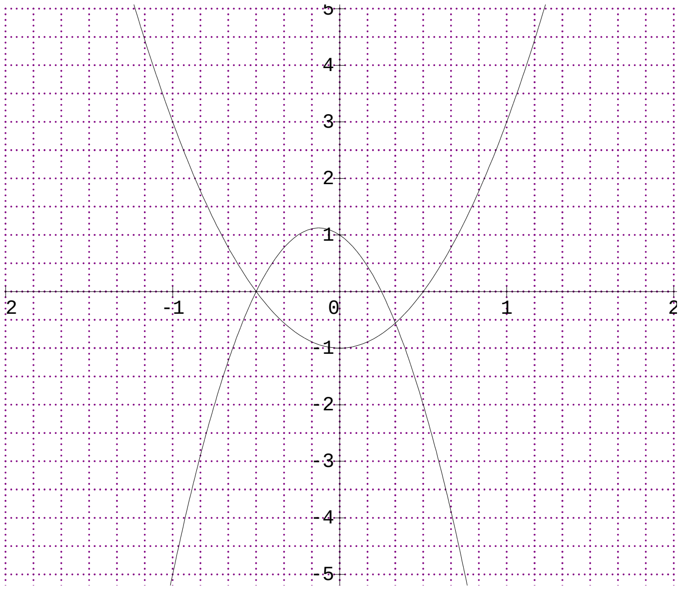
a) $x(x+1)+x^2=0$

b) $(2x+1)(1-4x)<0$

c) $4x^2-1=2x-1$

d) $4x^2-1<(2x+1)(1-4x)$ **.**

2. Dans le graphique ci-dessous sont données les courbes représentatives ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$) des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto 4x^2-1$ et $g : x \longmapsto -8x^2-2x+1$



a) Vérifier que $g(x) = (2x+1)(1-4x)$.

b) Compléter le graphique avec la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x+1$.

c) Expliquer comment retrouver l'ensemble des solutions de chacune des équations et inéquations du 1° b , 1°c et 1°d à l'aide du graphique.

Exercice 3: (4,5 points)

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5 cm , et trois points B , C et E de ce cercle tel que BC = CE = 4 cm. On désigne par H le symétrique de B par rapport à C .

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle HCE .

1. Faire une figure soignée.

2. **a)** Montrer que les triangles OEC et OCB sont isométriques .
Coder la figure en faisant apparaître les angles égaux.

b) Montrer alors que $\widehat{COE} = \widehat{HCE}$.

3. **a)** Montrer que les triangles OCE et HCE sont semblables .

b) On note A_{OCE} l'aire du triangle OCE et A_{HCE} celle du triangle HCE .

Montrer que $A_{HCE} = \dfrac{16}{25} A_{OCE}$.

c) Calculer A_{OCE} .

d) En déduire A_{HCE} .

Exercice 4: (3 points)

Soit A,B,C et D quatre points du plan non alignés et tels que AB = 5 et $\overrightarrow{DC} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. On considère le point E tel que 5 $\overrightarrow{EC} = 2\ \overrightarrow{DE}$

a) Déterminer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$, puis placer E.

b) Montrer que les segments [AE] et [BD] ont même milieu.

3. A chaque réel k, on fait correspondre le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

a) Pour quelle valeur de k le point M est-il le symétrique de C par rapport à D ?

c) Exprimer $\overrightarrow{DM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Sur quelle droite se déplace le point M lorsque k varie ?

A,B,C et D sont quatre points du plan **non alignés** tels que AB = 5 cm et $\overrightarrow{DC} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$

1. Faire une figure.

2. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. On considère le point E tel que 5 $\overrightarrow{EC} = 2\ \overrightarrow{DE}$

a) Montrer que 7 $\overrightarrow{DE} = 5\ \overrightarrow{DC}$ puis placer le point E.

b) Montrer que les segments [AE] et [BD] ont même milieu.

4. A chaque réel *k*, on fait correspondre le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

a) Exprimer $\overrightarrow{DM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du réel k .

b) Pour quelle valeur de *k* le point M est-il le symétrique de C par rapport à D ?

d) Sur quelle droite se déplace le point M lorsque *k* varie ? On pourra utiliser la question 4a) .

Exercice 5 : (4 points)

Une société de services en informatique fait une analyse des temps d'utilisation devant un ordinateur ; elle réalise une enquête auprès d'un échantillon de 200 clients et obtient les résultats suivants :

Temps de connexion en heures par an	Nombre d'utilisateurs	Effectifs cumulés croissants
[200 ;400[	15	
[400 ;600[	32	
[600 ;800[	35	
[800 ;1000[	78	
[1000 ;1200[	31	
[1200 ;1400[	9	

1. Calculer la moyenne de la série .

2. Déterminer l'étendue et la classe modale .

3. Compléter le tableau avec les effectifs cumulés croissants ; en déduire la classe contenant la médiane.

4. Représenter graphiquement le polygone des effectifs cumulés croissants (unités : 1cm pour 100 heures et 1cm pour 20 clients) et lire graphiquement le temps de connexion médian .

5. Quel est le pourcentage d'utilisateurs qui se connectent au moins 1000 heures par an ?

Exercice : (3. pts) Un laboratoire réalise des expériences de relevés de température de différentes matières. Le graphique ci-dessous est le résultat d'une expérience où x est le temps en min et f(x) la température en °C. La courbe représentative de la fonction f pour x variant dans [0 ; 12] est appelée C_f et est représentée sur le graphique ci-dessous.

1 a) Quelle est la température relevée au bout de 8 minutes ?

Au bout de 8 minutes la température est de : 11°C

b) Déterminer l'image de 6 par f.

L'image de 6 par f est 4.

c) Déterminer les antécédents de 4 par f.

les antécédents de 4 sont 1, 4, 6, 10 et 12.

2. a) Sur quel intervalle de temps, la température est-elle strictement supérieure à 6°C ?

la température est strictement supérieur à 6 sur] 6,5 ; 8,6 [

b) Résoudre $f(x) \leq 4$ et expliquer par une phrase sa signification dans l'expérience.

$f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x \in [0 ; 1] \cup [4 ; 6] \cup [10 ; 11,5]$

Sur les intervalles [0 ; 1], [4 ; 6] et [10 ; 11,5] la température est inférieure à 4°C

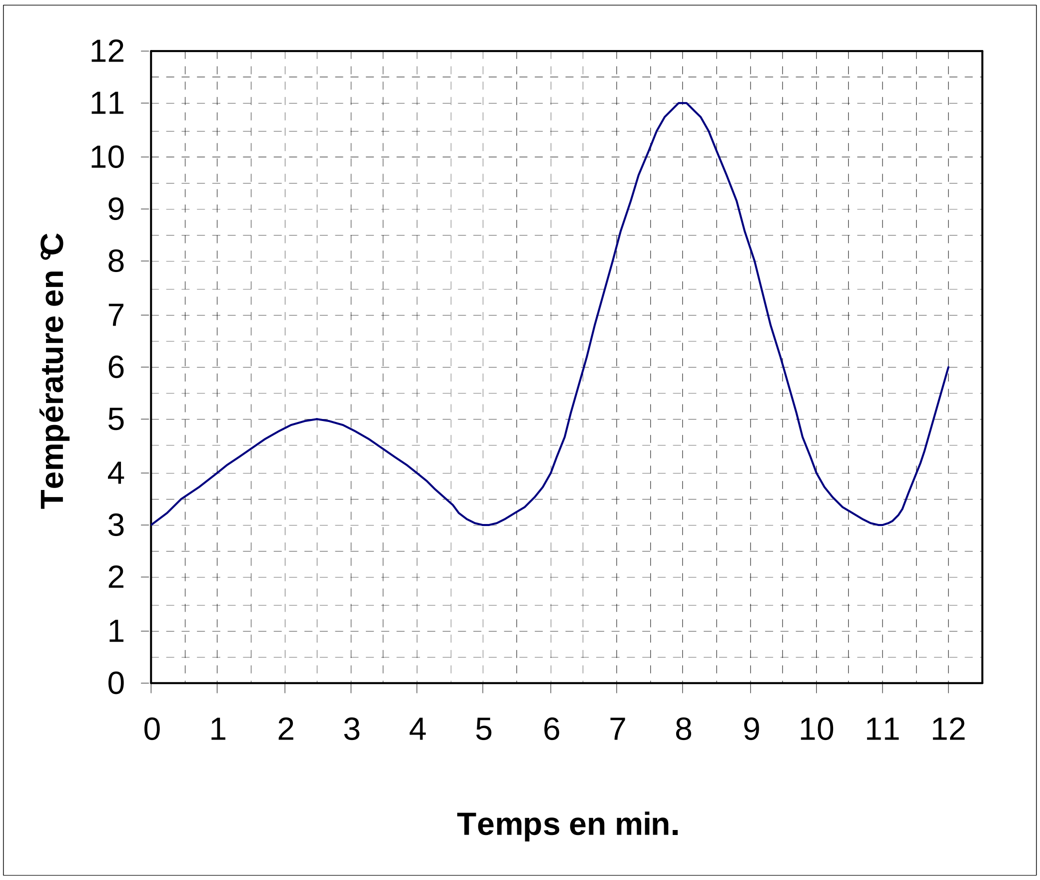
3. a) Construire le tableau de variations de f pour x appartenant à [0 ; 12].

x	0		2,5		5		8		11		12
f	3	↗	5	↘	3	↗	11	↘	3	↗	6

b) Déterminer le maximum et le minimum de f sur [0 ; 12]. (0.5 pt)

Le maximum de f sur [0 , 12] est : 11

Le minimum de f sur [0 , 12] est : 3.



Exercice 2 : (5,75 points) **1.Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : a) $x (x + 1) + x^2 = 0$**

$x (x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow x (x + 1) + x) = 0 \Leftrightarrow x (2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. $S = \left\{ 0 , -\frac{1}{2} \right\}$

b) $(2 x + 1) (1 - 4 x) < 0$

$2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $1 - 4 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		+
$2x+1$		–	0	+		+	
$1-4x$		+		+	0	–	
P(x)		–	0	+	0	–	

c) $4 x^2 - 1 = 2 x - 1$

$4 x^2 - 1 = 2 x - 1 \Leftrightarrow (2 x + 1) (2 x - 1) = 2 x - 1 \Leftrightarrow (2 x + 1) (2 x - 1) - (2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2 x - 1) ((2 x + 1) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2 x - 1) (2 x) = 0 \Leftrightarrow 2 x - 1 = 0$ ou $2 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 0$. $s = \left\{ 0 , \frac{1}{2} \right\}$

d) $4 x^2 - 1 < (2 x + 1) (1 - 4 x)$.

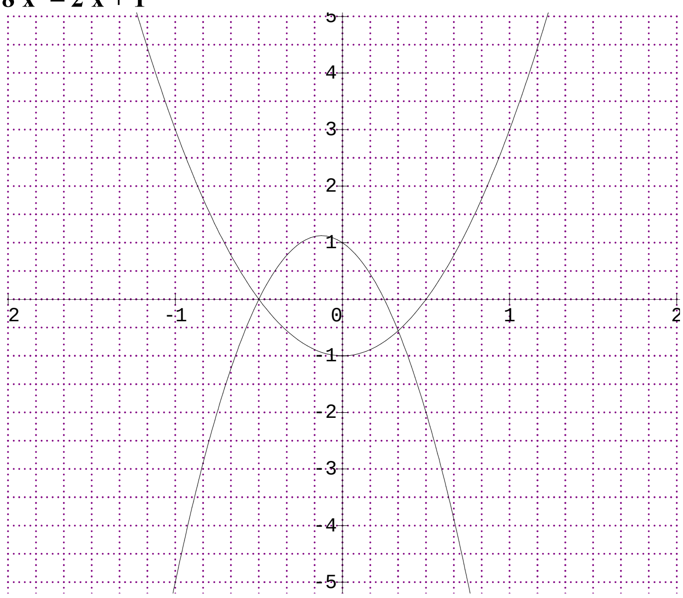
$4 x^2 - 1 < (2 x + 1) (1 - 4 x) \Leftrightarrow (2 x - 1) (2 x + 1) - (2 x + 1) (1 - 4 x) < 0 \Leftrightarrow (2 x + 1) ((2 x - 1) - (1 - 4 x)) < 0 \Leftrightarrow$

$(2 x + 1) (2 x - 1 - 1 + 4 x) < 0 \Leftrightarrow (2 x + 1) (6 x - 2) < 0$

$S = \left]-\frac{1}{2} , \frac{1}{3}\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		–	0	+		+	
$6x-2$		–		–	0	+	
P(x)		+	0	–	0	+	

2. Dans le graphique ci-dessous sont données les courbes représentatives ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$) des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto 4 x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto - 8 x^2 - 2 x + 1$



a) Vérifier que $g(x) = (2 x + 1) (1 - 4 x)$.

$(2 x + 1) (1 - 4 x) = 2 x - 8 x^2 + 1 - 4 x = - 8 x^2 - 2 x + 1 = g(x)$.

x	0	1
h(x)	1	3

b) Compléter le graphique avec la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2 x + 1$.

h est une fonction affine donc sa représentation garphique est une droite et pour la tracer les coordonnées de deux points de $\mathscr{C}_h$ suffisent

c) Expliquer comment retrouver l'ensemble des solutions de chacune des équations et inéquations du 1° b , 1°c et 1°d à l'aide du graphique.

1° b) $(2 x + 1) (1 - 4 x) < 0$. On repère les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_g$ au dessus de l'axe (Ox)

1° c) $4 x^2 - 1 = 2 x - 1$. On repère les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

1° d) $4 x^2 - 1 < (2 x + 1) (1 - 4 x)$. On repère les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice 3: (4,5 points) **On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5 cm , et trois points B , C et E de ce cercle tel que BC = CE = 4 cm. On désigne par H le symétrique de B par rapport à C .** ***L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle HCE*** **. 1. Faire une figure soignée. 2.a) Montrer que les triangles OEC et OCB sont isométriques. Coder la figure en faisant apparaître les angles égaux.**

$\left.\begin{array}{l} BC = CE = 4 \\ OB = OC = 5 \\ OC = OE = 5 \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} OBC \\ OCE \end{array}$ ont en commun les longueurs de leurs trois côtés ils sont donc isométriques et

$\left\{\begin{array}{l} \text{O et O sont homologues} \\ \text{B et C sont homologues} \\ \text{C et E sont homologues} \end{array}\right.$

b) Montrer alors que $\widehat{COE} = \widehat{HCE}$.

Les triangles $\begin{array}{c} OBC \\ OCE \end{array}$ sont isométriques donc leurs angles homologues sont de même mesure. Donc $\widehat{OCB} = \widehat{OCE}$

OCE est isocèle en O donc $\widehat{OCE} = \widehat{OEC}$ et $2 \times \widehat{OCE} + \widehat{COE} = 180°$

B, C et H sont alignés donc $2 \times \widehat{OCE} + \widehat{ECH} = 180°$

$\left.\begin{array}{l} 2 \times \widehat{OCE} + \widehat{COE} = 180° \\ 2 \times \widehat{OCE} + \widehat{ECH} = 180° \end{array}\right\}$ donc $\widehat{COE} = \widehat{ECH}$

2° a) Montrer que les triangles OCE et HCE sont semblables .

C est le milieu de [BH] donc CH = CB = CE = 4. Le triangle CHE est donc isocèle en C.

$\widehat{COE} = \widehat{HCE}$ donc $\widehat{CEH} = \dfrac{180 - \widehat{ECH}}{2} = \dfrac{180 - \widehat{COE}}{2} = \widehat{OCE}$.

$\left.\begin{array}{l} \widehat{COE} = \widehat{HCE} \\ \widehat{OCE} = \widehat{CEH} \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} COE \\ ECH \end{array}$ ont en commun les mesures de deux angles ils sont donc semblables et

$\left\{\begin{array}{l} \text{C et E sont homologues} \\ \text{O et C sont homologues} \\ \text{E et H sont homologues} \end{array}\right.$

b) On note A_{OCE} l'aire du triangle OCE et A_{HCE} celle du triangle HCE. Montrer que $A_{HCE} = \dfrac{16}{25} A_{OCE}$.

Les triangles $\begin{array}{c} COE \\ ECH \end{array}$ sont semblables donc le triangle CHE est une réduction du triangle OCE et le coefficient de proportionnalité est : $\dfrac{EC}{OC} = \dfrac{4}{5}$. On a donc $\dfrac{A_{HCE}}{A_{OCE}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$ et $A_{HCE} = \dfrac{16}{25} A_{OCE}$.

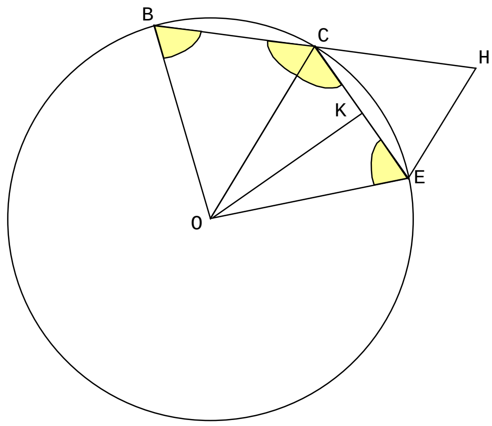
c) Calculer A_{OCE} .

Le triangle OCH est rectangle en h donc d'après le théorème de Pythagore on a : $OH^2 = OC^2 - CK^2 = 5^2 - 2^2 = 21$.

$A_{OCE} = \dfrac{1}{2} \times CE \times OH = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21}$

d) En déduire A_{HCE} .

$A_{HCE} = \dfrac{16}{25} \times 2\sqrt{21} = \dfrac{32\sqrt{21}}{25}$



Exercice 4: (3 points) **Soit A,B,C et D quatre points du plan non alignés et tels que AB = 5 et $\overrightarrow{DC} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.**

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$

2. On considère le point E tel que 5 $\overrightarrow{EC} = 2\ \overrightarrow{DE}$ a) Déterminer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$, puis placer E.

5 $\overrightarrow{EC} = 2\ \overrightarrow{DE}$ donc 5 $\overrightarrow{ED} + 5\ \overrightarrow{DC} = 2\ \overrightarrow{DE}$ donc 5 $\overrightarrow{DC} = 2\ \overrightarrow{DE} + 5\ \overrightarrow{DE}$ donc $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{DC}$

b) Montrer que les segments [AE] et [BD] ont même milieu.

$\overrightarrow{DE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{DC} = \left(\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

3. A chaque réel k, on fait correspondre le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

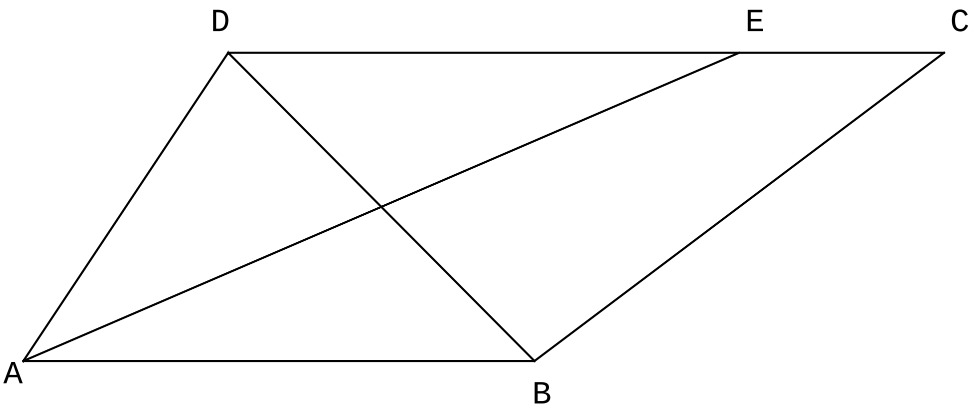
a) Pour quelle valeur de k le point M est-il le symétrique de C par rapport à D ?

M symétrique de C par rapport à D si et seulement si $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + k\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow k\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow k\ \overrightarrow{AB} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow k = -\frac{7}{5}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{DM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Sur quelle droite se déplace le point M lorsque k varie ?

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$. M est sur la parallèle à (AB) passant par D.



Exercice 5 : (4 points) **Une société de services en informatique fait une analyse des temps d'utilisation devant un ordinateur ; elle réalise une enquête auprès d'un échantillon de 200 clients et obtient les résultats suivants :**

Temps de connexion en heures par an	Nombre d'utilisateurs	Effectifs cumulés croissants
[200 ;400[	15	15
[400 ;600[	32	47
[600 ;800[	35	82
[800 ;1000[	78	160
[1000 ;1200[	31	191
[1200 ;1400[	9	200

1° Calculer la moyenne de la série .

$$\frac{300\times15 + 500\times32 + 700\times35 + 900\times78 + 1100\times31 + 1300\times9}{200} = 805$$

2° Déterminer l'étendue et la classe modale .

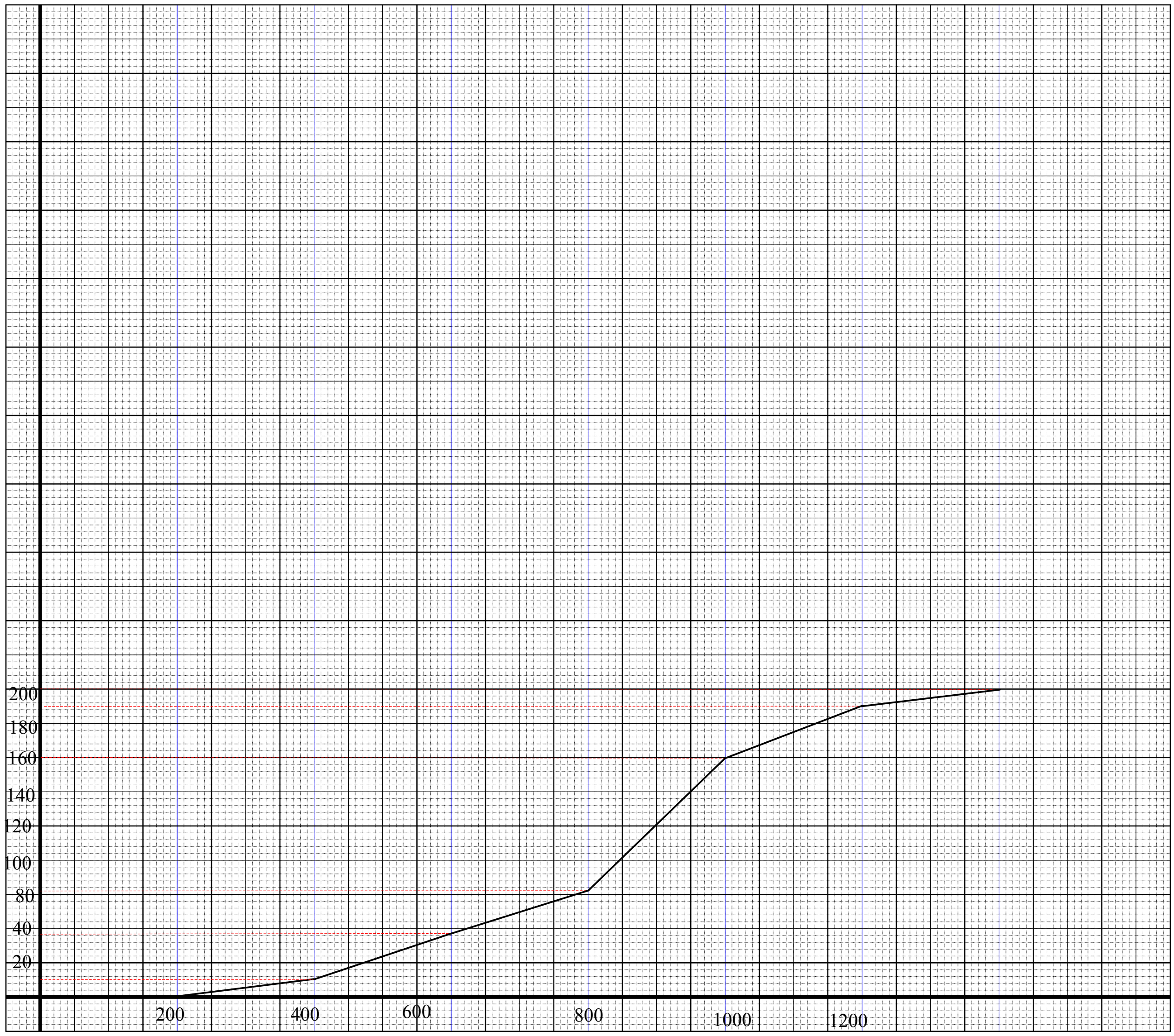
L'étendue est égale à 1400 – 200 = 1200. La classe modale est : [800 , 1000 [

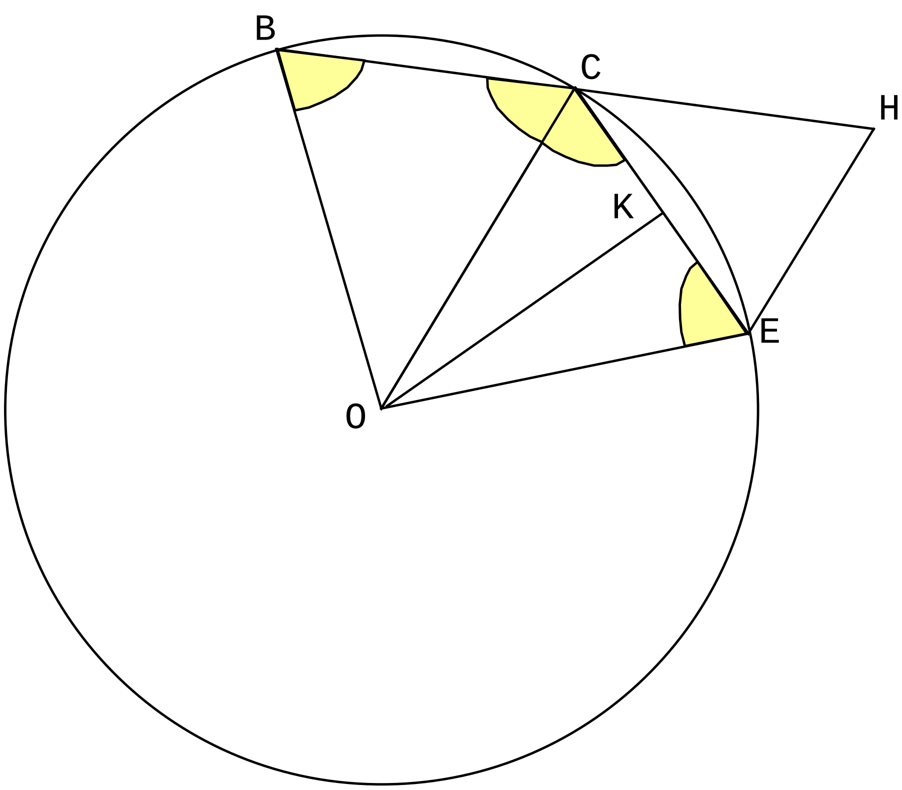
3° Compléter le tableau avec les effectifs cumulés croissants ; en déduire la classe contenant la médiane.

La classe médiane est : [800 , 1000 [

4° Représenter graphiquement le polygone des effectifs cumulés croissants (unités : 1cm pour 100 heures et 1cm pour 20 clients) et lire graphiquement le temps de connexion médian .

5° Quel est le pourcentage d'utilisateurs qui se connectent au moins 1000 heures par an ?


200
180
160
140
120
100
80
40
20
200
400
600
800
1000
1200


B
C
H
K
E
O