2°18 **Devoir surveillé n°1** samedi 2 octobre 2004

Exercice I Ensemble de nombres 3,5 points

Après avoir simplifié au maximum les nombres suivants, mettre une croix dans chaque case lorsque le nombre appartient à l'ensemble donné.

	ℕ	ℤ	ì	ℚ	ℝ
$a = \dfrac{1,05}{0,12}$					
$b = \dfrac{1}{3} - \sqrt{64}$					
$c = \sqrt{1 + \dfrac{3}{5}} \times \sqrt{1 - \dfrac{3}{5}}$					
$d = \dfrac{24}{9} - \dfrac{11}{3}$					
$e = (10^{-3} + 10^{-2}) \times 10^{4}$					
$f = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$					

Exercice II Calculs divers. 8 points

Ecrire sous forme de fraction irréductible : $a = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{9} \times \left(10 - \dfrac{5}{2}\right)$ et $b = \dfrac{\dfrac{2}{3} - 1}{\dfrac{1}{4} + 2}$

Simplifier : $c = 5 \times \dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{12}} \times \sqrt{\dfrac{28}{75}}$ et $d = (2 + \sqrt{3}) \times (1 - 2\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}$

Simplifier $e = \dfrac{12^3 \times 35^{-2} \times 9}{21^{-3} \times 6^4}$

Démontrer que $\sqrt{5} - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$

Exercice III Premier ou pas ? 3,5 points

1° La proposition :

« Si n est un entier naturel alors, tout nombre de la forme 6n + 5 est premier »,

est-elle juste ?

2° La proposition :

« Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 alors, tout nombre de la forme $n^2 - 1$ n'est pas premier »,

est-elle juste ?

On justifiera les réponses données

Exercice IV Avec une calculatrice. 5 points

Soit les réels A = 751300955011 et $B = 53125 \times 10^7$.

1° Décomposer B en produit de facteur premier.

2° Une calculatrice perfectionnée donne que $B = 2^7 \times 5^{12} \times 17$ et que A est un nombre premier (on ne cherchera pas à le démontrer). En déduire que la fraction $\dfrac{A}{B}$ est irréductible.

3° Avec la calculatrice calculer $\dfrac{A}{B}$ et $\sqrt{2}$.

On donnera les résultats donnés par la calculatrice.

Peut-on en déduire que $\dfrac{A}{B} = C$?

Ex I

	ℕ	ℤ	Ì	ℚ	ℝ	
$a = \dfrac{1{,}05}{0{,}12}$			■	■	■	$\dfrac{1{,}05}{0{,}12} = \dfrac{105}{12} = \dfrac{3 \times 35}{3 \times 4} = \boxed{\dfrac{35}{4}}$ ∈ Ì Ì ⊂ ℚ ⊂ ℝ
$b = \dfrac{1}{3} - \sqrt{64}$				■	■	$\dfrac{1}{3} - 8 = \boxed{-\dfrac{23}{3}} \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$c = \sqrt{1 + \dfrac{3}{5}} \times \sqrt{1 - \dfrac{3}{5}}$			■	■	■	$\sqrt{\left(1 + \dfrac{3}{5}\right)\left(1 - \dfrac{3}{5}\right)} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25 - 9}{25}} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$ ∈ Ì Ì ⊂ ℚ ⊂ ℝ
$d = \dfrac{24}{9} - \dfrac{11}{3}$		■	■	■	■	$\dfrac{8}{3} - \dfrac{11}{3} = \dfrac{-3}{3} = \boxed{-1} \in \mathbb{Z}$ ℤ ⊂ Ì ⊂ ℚ ⊂ ℝ
$e = (10^{-3} + 10^{-2}) \times 10^4$	■	■	■	■	■	$10^{-3} \times 10^4 + 10^{-2} \times 10^4 = 10 + 100 = \boxed{110} \in \mathbb{N}$ ℕ ⊂ ℤ ⊂ Ì ⊂ ℚ ⊂ ℝ
$f = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$					■	$f \in \mathbb{R}$ et f est un irrationnel $f \notin \mathbb{Q}$

Ex II $a = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{9} \times \left(10 - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{21} - \dfrac{2}{9} \times \dfrac{20 - 5}{3} = \dfrac{7}{21} + \dfrac{2}{21} - \dfrac{2}{9} \times \dfrac{15}{2} = \dfrac{9}{21} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{9 - 35}{21} = = \boxed{-\dfrac{26}{21}}$

$$b = \dfrac{\dfrac{2}{3} - 1}{\dfrac{1}{4} + 2} = \dfrac{\dfrac{2 - 3}{3}}{\dfrac{1 + 8}{4}} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{9} = \boxed{-\dfrac{4}{27}}$$

$$c = 5 \times \dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{12}} \times \sqrt{\dfrac{28}{75}} = 5 \times \sqrt{\dfrac{63 \times 28}{12 \times 75}} = 5 \times \sqrt{\dfrac{7 \times 9 \times 4 \times 7}{4 \times 3 \times 3 \times 25}} = 5 \times \sqrt{\dfrac{7 \times 7}{25}} = 5 \times \dfrac{7}{5} = \boxed{7}$$

$$d = (2 + \sqrt{3}) \times (1 - 2\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} = 2 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 \times 3 + 3\sqrt{3} = \boxed{-4}$$

$$e = \dfrac{12^3 \times 35^{-2} \times 9}{21^{-3} \times 6^4} = \dfrac{(3 \times 2^2)^3 \times (7 \times 5)^{-2} \times 3^2}{(3 \times 7)^{-3} \times (2 \times 3)^4} = \dfrac{3^3 \times 2^6 \times 7^{-2} \times 5^{-2} \times 3^2}{3^{-3} \times 7^{-3} \times 2^4 \times 3^4} =$$

$$= \dfrac{3^5 \times 2^6 \times 7^{-2} \times 5^{-2}}{3 \times 2^4 \times 7^{-3}} = 3^4 \times 2^2 \times 7 \times 5^{-2} = \boxed{\dfrac{3^4 \times 2^2 \times 7}{5^2}}$$

$$\dfrac{1}{\sqrt{5} + 2} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} = \boxed{\sqrt{5} - 2}.$$

Ex III

1° La proposition est fausse. Un contre exemple suffit à le démontrer.

Si n = 5, $6 \times 5 + 5 = 5 \times 7$ n'est pas premier.

2° La proposition est semble vraie.

Des exemples, même nombreux ne peuvent le démontrer

pour tout entier $n \geq 3$ on a : $\boxed{\mathbf{n^2 - 1 = (n - 1)\ (n + 1).}}$

Comme n est supérieur à 3, $n - 1$ et $n + 1$ sont deux diviseurs de $n^2 - 1$ différents de 1.
Donc $n^2 - 1$ n'est pas premier.

53125	5
10625	5
2125	5
425	5
85	5
17	

Ex IV

1° $B = 53125 \times 10^7 = 53125 \times (2 \times 5)^7 = 5^5 \times 17 \times 2^7 \times 5^7 = \boxed{\mathbf{2^7 \times 5^{12} \times 17}}$

2° A est premier et il ne figure pas dans la décomposition en produit de facteurs premiers de B

(On peut aussi dire que comme A est un nombre premier strictement supérieur à 17, il n'est divisible ni par 2 ni par 5 ni par 17)

On peut conclure (dans les deux cas) que A et B n'ont pas de diviseur commun autre que 1, et donc que $\frac{A}{B}$ est irréductible

3° La TI 89 donne $\boxed{\frac{A}{B} \approx 1{,}414213556237}$ et $\boxed{\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237}$

La casio collège donne $\frac{A}{B} \approx 1{,}414213562$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$

On ne peut en déduire que $\frac{A}{B} = \sqrt{2}$ puisque la calculatrice ne donne que des valeurs approchées.

Pour aller plus loin. Peut-on démontrer que $\frac{A}{B} \neq \sqrt{2}$.

La TI 89 donne $\frac{A}{B} - \sqrt{2} \approx 5\ 10^{-13}$ ce qui permet de conclure que $\sqrt{2} \neq \frac{A}{B}$

la casio collège donne $\frac{A}{B} - \sqrt{2} \approx 0$ ce qui ne permet pas de conclure que $\sqrt{2} \neq \frac{A}{B}$

On sait que $\frac{A}{B} \in \mathbb{Q}$ et que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ on peut donc affirmer que $\boxed{\sqrt{2} \neq \frac{A}{B}}$

($\frac{A}{B}$ est un rationnel et $\sqrt{2}$ est un irrationnel)