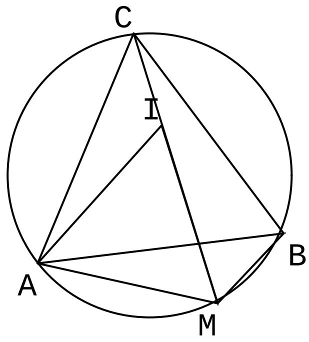
Exercice I

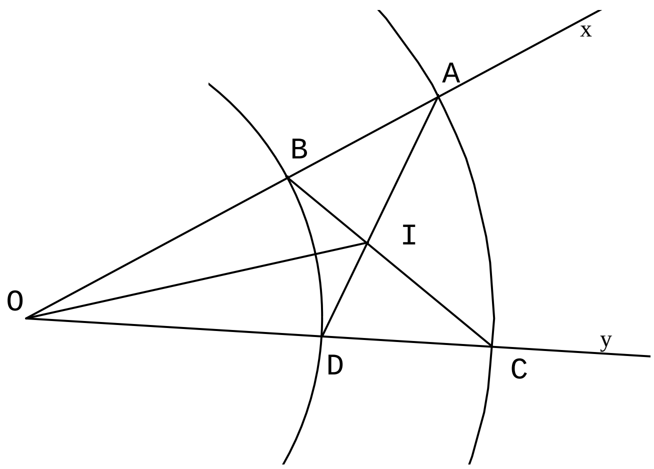
Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral, et $\mathcal{C}$ et son cercle circonscrit.
M est un point quelconque du petit arc AB.
On considère le point I du segment [MC] tel que MI = MA.
On veut montrer que MA + MB = MC.



1° Montrer que MAI est un triangle équilatéral.
2° En déduire que $\widehat{CAI} = \widehat{BAM}$
3° Démontrer que les triangles ACI et ABM sont isométriques.
4° En déduire que CI = MB.
5° Conclure.

Exercice II

Soit un angle $\widehat{xOy}$. Un cercle de centre O coupe [Ox) en A et [Oy) en C ; un autre cercle de même centre coupe [Ox) en B et [Oy) en D. Les droites (AD) et (BC) se coupent en I.
Il s'agit de démontrer que la droite (OI) est bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$, donc de démontrer que deux angles sont égaux.



1° Comparer les triangles OAD et OBC . Ecrire les égalités d'angles qui en découlent.
2° Comparer les triangles IAB et ICD . En déduire que IA = IC .
3° Comparer les triangles OAI et OCI . Conclure.

Exercice III

Une propriété des triangles isocèles
OAB est un triangle isocèle de sommet O.
(AA') et (BB') sont les hauteurs issues respectivement de A et de B.
Elles se coupent en I .
1° Comparer les triangles ABA' et BAB'.
2° En déduire que AA' = BB' .
3° Réciproquement que peut-on dire d'un triangle qui a deux hauteurs de même longueur ?
Justifier *(Hors barème)*

NOM____

Exercice IV

A chaque question est affecté un certain nombre de points.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Pour chaque question proposée le nombre d'affirmations exactes peut varier de 0 à 4.
Le candidat doit cocher les cases correspondant aux réponses éxactes.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.
Aucune justification n'est demandée.

1° Soit a un réel vérifiant : **2 £ a £ 3** On peut affirmer que :

$2 - 3\,a \leq -7$ $\qquad$ $-1 \leq 5 - 2\,a \leq 1$ $\qquad$ $a - 3 \leq 1$ $\qquad$ $2\,a + 3 \geq 9$

3° Soit a un réel **strictement négatif.** On peut affirmer que :

$\dfrac{1}{6\,a} \geq \dfrac{5}{6\,a}$ $\qquad$ $\dfrac{5\,a}{12} \geq \dfrac{3\,a}{8}$ $\qquad$ $3\,a \leq 2\,a$ $\qquad$ $3\,a^2 \leq 2\,a^2$

4° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{0 < a < \frac{1}{2}}$. On peut affirmer que :

$\dfrac{1}{a} - 1 < 1$ $\qquad$ $\dfrac{1}{a} - 1 > 1$ $\qquad$ $\dfrac{1}{4} - a^2 < 0$ $\qquad$ $\dfrac{1}{a - 1} < 1$

5° Soit x un réel vérifiant : **x > 1**. On peut affirmer que :

$\dfrac{1}{x - 1} \geq 0$ $\qquad$ $\dfrac{x}{1 - x} < \dfrac{1 + x}{1 - x}$ $\qquad$ $\dfrac{1 + x}{1 - x} < \dfrac{x}{1 - x}$ $\qquad$ $-2 < \dfrac{1}{x - 1} < -1$

6° Soit a et b deux réels **positifs** On peut affirmer que:

$\dfrac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 \geq \dfrac{a^2 + b^2}{4}$

7° Soit a un réel vérifiant : **0 < a < 1**. On peut affirmer que

$a^2 \leq a^3$ $\qquad$ $\dfrac{1}{a} < a^2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{a} > a$ $\qquad$ $\dfrac{1}{a^2} > a$

Exercice V

Résoudre l'inéquation
$$\frac{2\,x - 1}{x^2 - 1} \geq \frac{5\,x - 2}{x^2 - 1}$$

ou…
$$\frac{1 - 3\,x}{(x + 1)\,(x - 1)} \geq 0$$

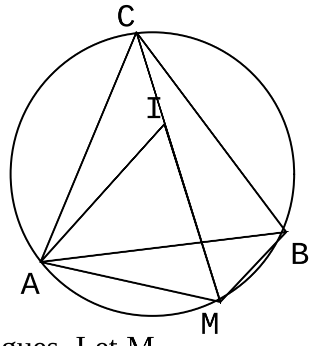
Résoudre l'inéquation
$$2\,(x^2 - 9) + x\,(x - 3) \leq x - 3$$

ou…
$$(x - 3)\,(3\,x + 5) \leq 0$$

Exercice I

1° Dans le cercle C les angles inscrits $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$ ils sont donc égaux.

Dans le triangle AMI isocèle en I l'angle $\widehat{AMI}$ est égal à 60°. Il est donc équilatéral.



2° $\widehat{CAI} = \widehat{CAM} - \widehat{IAM}$ et $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} - \widehat{CAB}$. $\widehat{IAM} = \widehat{CAB} = 60°$ donc $\widehat{CAI} = \widehat{BAM}$

3° $\begin{cases} \widehat{CAI} = \widehat{BAM} \\ AI = AM \\ AC = AB. \end{cases}$

Les triangles CAI et BAM ont un angle égal compris entre deux angles respectivement égaux ils sont donc isométriques avec C et B homologues, A et A homologues, I et M homologues.

4° Les triangles CAI et BAM ont donc leurs côtés homologues égaux 2 à 2 donc CI = BM.

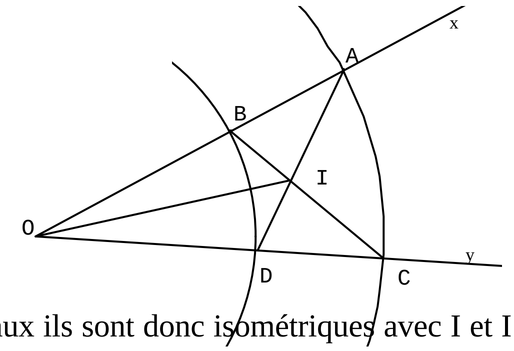
5° Par hypothèse MA = MI et on a vu que MB = IC donc MA + MB = MI + IC = MC.

Exercice II

1° A et C sont sur un cercle de centre O donc OA = OC et B et D sont sur un cercle de centre O donc OB = OD.

$\begin{cases} \widehat{AOD} = \widehat{COB} \\ OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$ Les triangles OAD et OCB ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ils sont donc isométriques avec O et O homologues, A et C homologues et B et D homologues.

Des triangles isométriques ont leurs angles égaux 2 à 2 donc $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ et $\widehat{ODA} = \widehat{OBC}$.



2° $\widehat{BIA}$ et $\widehat{DIC}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{BIA} = \widehat{DIC}$.

De plus $\widehat{IAB} = \widehat{ICD}$ et donc $\widehat{ABI} = \widehat{CDI}$.

BA = OA – OB = OC – OD = DC. $\begin{cases} \widehat{ABI} = \widehat{CDI} \\ \widehat{BAI} = \widehat{DCI} \\ BA = DC \end{cases}$

Les triangles ABI et CDI ont un côté égal adjacent à deux angles égaux ils sont donc isométriques avec I et I homologues, A et C homologues, B et D homologues.

Des triangles isométriques ont leurs côtés homologues égaux 2 à 2 donc IA = IC.

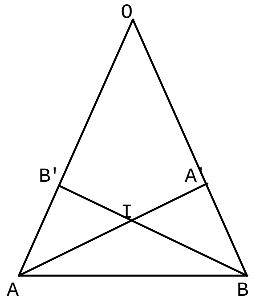
3° OI = OI, OA = OC et AI = CI donc les triangles OAI et OCI sont isométriques avec O et O homologues, A et C homologues, I et I homologues. $\begin{cases} OI = OI \\ OA = OC \\ AI = CI \end{cases}$ ou $\begin{cases} \widehat{OAI} = \widehat{OCI} \\ AO = OC \\ OI = OI \end{cases}$

Des triangles isométriques ont leurs angles homologues égaux 2 à 2 donc $\widehat{AOI} = \widehat{COI}$ donc (OI) est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$.

Exercice III

1° OAB est isocèle en O donc $\widehat{BAB'} = \widehat{ABA'}$. $\widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90°$ donc $\widehat{ABB'} = \widehat{BAA'}$ $\left\{\begin{array}{l} AB = AB \\ \widehat{BAB'} = \widehat{ABA'} \\ \widehat{ABB'} = \widehat{BAA'} \end{array}\right.$

Les triangles ABA’ et BAB’ ont un côté égal compris entre deux angles égaux ils sont donc isométriques avec A et B homologues, A’ et B’ homologues, B et A homologues.



2° Des triangles isométriques ont leurs côtés homologues égaux 2 à 2 donc AA’ = BB’.

3° Soit un triangles OAB avec ses hauteurs AA’ et BB’ de même longueurs

On va démontrer que OAB est isocèle en O

AA’B est rectangle en A’ et BB’A est rectangles en B’.

De plus AB = BA, AA’ = BB’ donc d’après le théorème de Pythagore :

$BA'^2 = BB'^2 - AB^2 = AA'^2 - AB^2 = BA'^2$.

Les triangles AA’B et BB’A ont leurs côtés égaux 2 à 2 ils sont donc isométriques avec A et B homologues, A’ et B’ homologues, B et A homologues.

Leurs angles homologues sont donc égaux et donc $\widehat{BAB'} = \widehat{ABA'}$ et donc le triangle OAB est isocèle en O (il a deux angles égaux)

Exercice V

$\dfrac{2x-1}{x^2-1} \geq \dfrac{5x-2}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x^2-1} - \dfrac{5x-2}{x^2-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-1-(5x-2)}{x^2-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-1-5x+2}{x^2-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

x	– ∞	– 1		1/3		1	+∞
1 – 3 x	+		+	0	–		–
x – 1	–		–		–	0	+
x + 1	–	0	+		+		+
$\dfrac{1-3x}{(x-1)(x+1)}$	+	‖	–	0	+	‖	–

$\boxed{S =]-\infty : -1 [\cup [1/3 : 1 [}$

$2(x^2-9) + x(x-3) \leq x-3$

$\Leftrightarrow 2(x+3)(x-3) + x(x-3) - (x-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(2(x+3) + x - 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x+6+x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(3x+5) \leq 0$

x	–∞	–5/3		3	+∞
x – 3	–		–	0	+
3 x + 5	–	0	+		+
(x – 3) (3 x + 5)	+	0	–	0	+

$\boxed{S = [-5/3 : 3]}$