

**Exercice I**

Dans la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle équilatéral, et  $C$  et son cercle circonscrit.

$M$  est un point quelconque du petit arc  $AB$ .

On considère le point  $I$  du segment  $[MC]$  tel que  $MI = MA$ .

On veut montrer que  $MA + MB = MC$ .

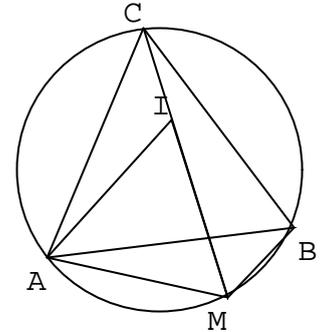
1° Montrer que  $MAI$  est un triangle équilatéral.

2° En déduire que  $\widehat{CAI} = \widehat{BAM}$

3° Démontrer que les triangles  $ACI$  et  $ABM$  sont isométriques.

4° En déduire que  $CI = MB$ .

5° Conclure.

**Exercice II**

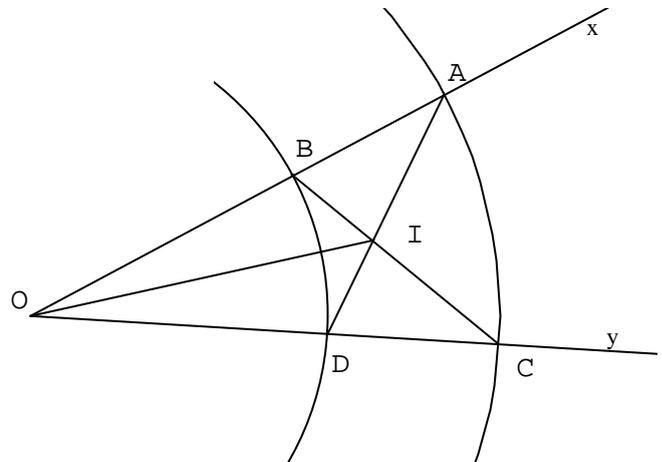
Soit un angle  $\widehat{xOy}$ . Un cercle de centre  $O$  coupe  $[Ox)$  en  $A$  et  $[Oy)$  en  $C$ ; un autre cercle de même centre coupe  $[Ox)$  en  $B$  et  $[Oy)$  en  $D$ . Les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $I$ .

Il s'agit de démontrer que la droite  $(OI)$  est bissectrice de l'angle  $\widehat{xOy}$ , donc de démontrer que deux angles sont égaux.

1° Comparer les triangles  $OAD$  et  $OBC$ . Ecrire les égalités d'angles qui en découlent.

2° Comparer les triangles  $IAB$  et  $ICD$ . En déduire que  $IA = IC$ .

3° Comparer les triangles  $OAI$  et  $OCI$ . Conclure.

**Exercice III**

Une propriété des triangles isocèles

$OAB$  est un triangle isocèle de sommet  $O$ .

$(AA')$  et  $(BB')$  sont les hauteurs issues respectivement de  $A$  et de  $B$ .

Elles se coupent en  $I$ .

1° Comparer les triangles  $ABA'$  et  $BAB'$ .

2° En déduire que  $AA' = BB'$ .

3° Réciproquement que peut-on dire d'un triangle qui a deux hauteurs de même longueur ?

Justifier (*Hors barème*)

**Exercice IV**

A chaque question est affecté un certain nombre de points.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Pour chaque question proposée le nombre d'affirmations exactes peut varier de 0 à 4.

Le candidat doit cocher les cases correspondant aux réponses exactes.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.

Aucune justification n'est demandée.

1° Soit a un réel vérifiant : **2 f a f 3** On peut affirmer que :

$$2 - 3a \leq -7$$

$$-1 \leq 5 - 2a \leq 1$$

$$a - 3 \leq 1$$

$$2a + 3 \geq 9$$

3° Soit a un réel **strictement négatif**. On peut affirmer que :

$$\frac{1}{6a} \geq \frac{5}{6a}$$

$$\frac{5a}{12} \geq \frac{3a}{8}$$

$$3a \leq 2a$$

$$3a^2 \leq 2a^2$$

4° Soit a un réel vérifiant : **0 < a < 1/2**. On peut affirmer que :

$$\frac{1}{a} - 1 < 1$$

$$\frac{1}{a} - 1 > 1$$

$$\frac{1}{4} - a^2 < 0$$

$$\frac{1}{a-1} < 1$$

5° Soit x un réel vérifiant : **x > 1**. On peut affirmer que :

$$\frac{1}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x}{1-x} < \frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{1+x}{1-x} < \frac{x}{1-x}$$

$$-2 < \frac{1}{x-1} < -1$$

6° Soit a et b deux réels **positifs** On peut affirmer que:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{a^2 + b^2}{4}$$

7° Soit a un réel vérifiant : **0 < a < 1**. On peut affirmer que

$$a^2 \leq a^3$$

$$\frac{1}{a} < a^2$$

$$\frac{1}{a} > a$$

$$\frac{1}{a^2} > a$$

**Exercice V**

Résoudre l'inéquation

$$\frac{2x-1}{x^2-1} \geq \frac{5x-2}{x^2-1}$$

ou...  

$$\frac{1-3x}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Résoudre l'inéquation

$$2(x^2-9) + x(x-3) \leq x-3$$

ou...  

$$(x-3)(3x+5) \leq 0$$

### Exercice I

1° Dans le cercle C les angles inscrits  $\widehat{AMC}$  et  $\widehat{ABC}$  interceptent le même arc  $\widehat{AC}$  ils sont donc égaux.

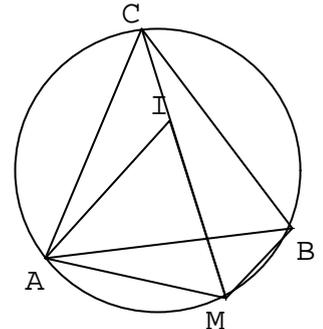
Dans le triangle AMI isocèle en I l'angle  $\widehat{AMI}$  est égal à  $60^\circ$ . Il est donc équilatéral.

2°  $\widehat{CAI} = \widehat{CAM} - \widehat{IAM}$  et  $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} - \widehat{CAB}$ .  $\widehat{IAM} = \widehat{CAB} = 60^\circ$  donc  $\widehat{CAI} = \widehat{BAM}$

$$3^\circ \begin{cases} \widehat{CAI} = \widehat{BAM} \\ AI = AM \\ AC = AB. \end{cases}$$

Les triangles CAI et BAM ont un angle égal compris entre deux angles

respectivement égaux ils sont donc isométriques avec C et B homologues, A et A homologues, I et M homologues.



4° Les triangles CAI et BAM ont donc leurs côtés homologues égaux 2 à 2 donc  $CI = BM$ .

5° Par hypothèse  $MA = MI$  et on a vu que  $MB = IC$  donc  $MA + MB = MI + IC = MC$ .

### Exercice II

1° A et C sont sur un cercle de centre O donc  $OA = OC$  et B et D sont sur un cercle de centre O donc  $OB = OD$ .

$$\begin{cases} \widehat{AOD} = \widehat{COB} \\ OA = OC \\ OB = OD \end{cases} \quad \text{Les triangles OAD et OCB ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux}$$

ils sont donc isométriques avec O et O homologues, A et C homologues et B et D homologues.

Des triangles isométriques ont leurs angles égaux 2 à 2 donc  $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$  et  $\widehat{ODA} = \widehat{OBC}$ .

2°  $\widehat{BIA}$  et  $\widehat{DIC}$  sont opposés par le sommet donc  $\widehat{BIA} = \widehat{DIC}$ .

De plus  $\widehat{IAB} = \widehat{ICD}$  et donc  $\widehat{ABI} = \widehat{CDI}$ .

$$BA = OA - OB = OC - OD = DC. \quad \begin{cases} \widehat{ABI} = \widehat{CDI} \\ \widehat{BAI} = \widehat{DCI} \\ BA = DC \end{cases}$$

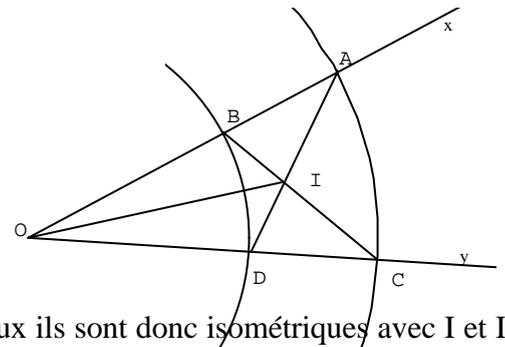
Les triangles ABI et CDI ont un côté égal adjacent à deux angles égaux ils sont donc isométriques avec I et I homologues, A et C homologues, B et D homologues.

Des triangles isométriques ont leurs côtés homologues égaux 2 à 2 donc  $IA = IC$ .

3°  $OI = OI$ ,  $OA = OC$  et  $AI = CI$  donc les triangles OAI et OCI sont isométriques avec O et O homologues, A

$$\text{et C homologues, I et I homologues.} \quad \begin{cases} OI = OI \\ OA = OC \\ AI = CI \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \widehat{OAI} = \widehat{OCI} \\ AO = OC \\ OI = OI \end{cases}$$

Des triangles isométriques ont leurs angles homologues égaux 2 à 2 donc  $\widehat{AOI} = \widehat{COI}$  donc (OI) est bien la bissectrice de l'angle  $\widehat{AOC}$ .



### Exercice III

1° OAB est isocèle en O donc  $\widehat{BAB'} = \widehat{ABA'}$ .  $\widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90^\circ$  donc  $\widehat{ABB'} = \widehat{BAA'}$   $\left\{ \begin{array}{l} AB = AB \\ \widehat{BAB'} = \widehat{ABA'} \\ \widehat{ABB'} = \widehat{BAA'} \end{array} \right.$

Les triangles ABA' et BAB' ont un côté égal compris entre deux angles égaux ils sont donc isométriques avec A et B homologues, A' et B' homologues, B et A homologues.

2° Des triangles isométriques ont leurs côtés homologues égaux 2 à 2 donc  $AA' = BB'$ .

3° Soit un triangles OAB avec ses hauteurs AA' et BB' de même longueurs

On va démontrer que OAB est isocèle en O

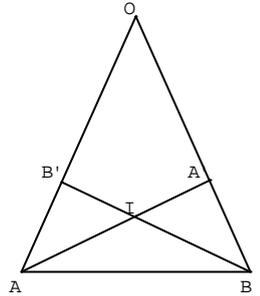
AA'B est rectangle en A' et BB'A est rectangles en B'.

De plus  $AB = BA$ ,  $AA' = BB'$  donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BA'^2 = BB'^2 - AB^2 = AA'^2 - AB^2 = BA'^2.$$

Les triangles AA'B et BB'A ont leurs côtés égaux 2 à 2 ils sont donc isométriques avec A et B homologues, A' et B' homologues, B et A homologues.

Leurs angles homologues sont donc égaux et donc  $\widehat{BAB'} = \widehat{ABA'}$  et donc le triangle OAB est isocèle en O (il a deux angles égaux)



### Exercice V

$$\frac{2x-1}{x^2-1} \geq \frac{5x-2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{5x-2}{x^2-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-(5x-2)}{x^2-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-5x+2}{x^2-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-1$	$1/3$	$1$	$+\infty$
$1-3x$	+	+	0	-	-
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$\frac{1-3x}{(x-1)(x+1)}$	+	-	0	+	-

$$\boxed{S = ]-\infty : -1[ \cup [1/3 : 1[}$$

$$2(x^2-9) + x(x-3) \leq x-3$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)(x-3) + x(x-3) - (x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2(x+3) + x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+6+x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(3x+5) \leq 0$$

x	$-\infty$	$-5/3$	$3$	$+\infty$	
$x-3$	-	-	0	+	
$3x+5$	-	0	+	+	
$(x-3)(3x+5)$	+	0	-	0	+

$$\boxed{S = [-5/3 : 3]}$$