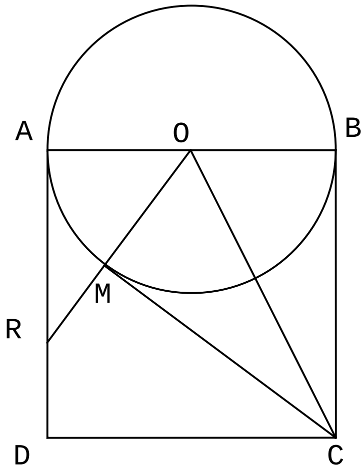
2°10 **Devoir surveillé n°3** Vendredi 23 novembre 2005

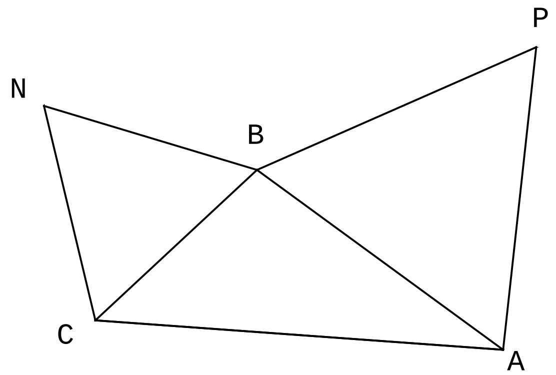
$\boxed{1}$ Construire un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 4 cm, et l'angle $\widehat{BAC}$ ait pour mesure 40°.

La médiatrice de [AB] coupe la droite (BC) en D .
On trace la droite (DA) et sur la demi-droite d'origine A ne contenant pas le point D on place E tel que : AE = CD
a) Montrer que DAB est un triangle isocèle, puis établir l'égalité des angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{ACD}$.
b) Comparer les triangles BAE et ACD . En déduire que le triangle BDE est isocèle.

$\boxed{2}$ Soit ABCD un carré et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].

La tangente au cercle $\mathscr{C}$ issue de C coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M. la droite (OM) coupe le segment [AD] en R.
1° Démontrer que les triangles OBC et OMC sont isométriques.
2° a) Démontrer que CMR et DCR sont isométriques.
b) En déduire la nature du triangle DMR.





$\boxed{3}$ Problème ouvert :

A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux CBN et ABP.
Montrer, à l'aide de triangles isométriques, que l'on a AN = CP.

$\boxed{4}$ Sur un segment [AB] de longueur 4 cm, on place un point I, et on appelle x la longueur AI.

On trace les carrés AIJK et IBLM.
1° Démontrer que la surface S des deux carrés réunis vaut $S = 2x^2 - 8x + 16$.
2° Factoriser $S - 8$, et ¡¡ en déduire que la surface S est toujours supérieure ou égale à 8 cm^2 .
Peut-elle être égale à 8 cm^2 ? Pour quelle position de I ?
3° Démontrer que $S - 10 = 2(x-1)(x-3)$. En déduire les valeurs de x telles que $S = 10$ cm^2
4° Compléter le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$		0		
$x - 3$			0	
$S - 10$				

En déduire les valeurs de x telles que $S \leq 10$ cm^2 .

$\boxed{5}$ On considère un nombre réel a tel que $0 < a < 1$.

Démontrer que $a^4 < a^3$.

$\boxed{6}$ A chaque question est affecté un certain nombre de points.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Pour chaque question proposée le nombre d'affirmations exactes peut varier de 0 à 4.
Le candidat doit cocher les cases correspondant aux réponses exactes.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.
Aucune justification n'est demandée.

1° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{-2 \leq a \leq 1}$ On peut affirmer que :

□ $2 - 3a \geq -1$ □ $2a - 5 \leq -2$ □ $a - 3 \geq 1$ □ $2a + 3 \geq 5$

2° Soit a un réel **strictement négatif.** On peut affirmer que :

□ $\dfrac{1}{6a} \geq \dfrac{5}{6a}$ □ $\dfrac{a}{9} \geq \dfrac{a}{7}$ □ $3a \leq 2a$ □ $3a^2 \leq 2a^2$

3° Soit x un réel vérifiant : $\mathbf{x > 1}$. On peut affirmer que :

□ $\dfrac{1}{x-1} \geq 0$ □ $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1+x}{x-1}$ □ $\dfrac{x}{1-x} > \dfrac{x+1}{1-x}$ □ $3(1-x) < 5(1-x)$

4° Soit x et y sont deux réels tels que : $0 < x \leq y$. On peut affirmer que:

□ $2x + 3y \leq 3x + 2y$ □ $\dfrac{1}{x+2y} \leq \dfrac{1}{2x+y}$ □ $x - 3y \geq 3x - y$ □ $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{y+1}$

5° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{0 < a < 1}$. On peut affirmer que

□ $a^2 \leq a^3$ □ $\dfrac{1}{a} < a^2$ □ $\dfrac{1}{a} > a$ □ $\dfrac{1}{a^2} > a$

Nom

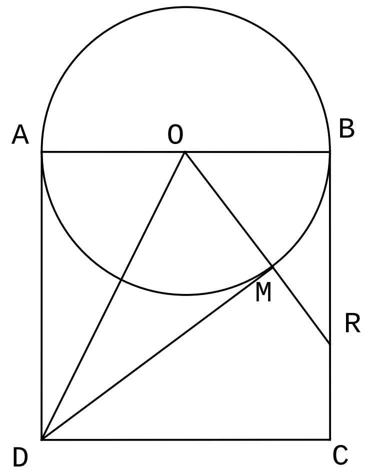
2°10 **Devoir surveillé n°3** Vendredi 23 novembre 2005

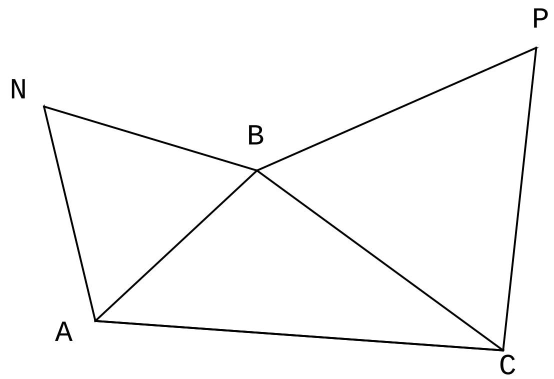
$\boxed{1}$ Construire un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 5 cm, et l'angle $\widehat{BAC}$ ait pour mesure 40°.

La médiatrice de [AC] coupe la droite (BC) en D .
On trace la droite (DA) et sur la demi-droite d'origine A ne contenant pas le point D on place E tel que : AE = BD
a) Montrer que DAC est un triangle isocèle, puis établir l'égalité des angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ABD}$.
b) Comparer les triangles CAE et ABD . En déduire que le triangle CDE est isocèle.

$\boxed{2}$ Soit ABCD un carré et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].

La tangente au cercle $\mathscr{C}$ issue de D coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M. la droite (OM) coupe le segment [BC] en R.
1° Démontrer que les triangles OAD et OMD sont isométriques.
2° a) Démontrer que DMR et DCR sont isométriques.
b) En déduire la nature du triangle CMR.





$\boxed{3}$ Problème ouvert :

A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux BAN et CBP.
Montrer, à l'aide de triangles isométriques, que l'on a CN = AP.

$\boxed{4}$ Sur un segment [AB] de longueur 6 cm, on place un point I, et on appelle x la longueur AI.

On trace les carrés AIJK et IBLM.
1° Démontrer que la surface S des deux carrés réunis vaut $S = 2x^2 - 12x + 36$.
2° Factoriser $S - 18$, et en déduire que la surface S est toujours supérieure ou égale à 18 cm^2 .
Peut-elle être égale à 18 cm^2 ? Pour quelle position de I ?
3° Démontrer que $S - 20 = 2(x - 2)(x - 4)$. En déduire les valeurs de x telles que S = 20 cm^2
4° Compléter le tableau de signe suivant

x	0	2	4	6
$x - 2$			0	
$x - 4$		0		
$S - 20$				

En déduire les valeurs de x telles que $S \leq 20$ cm^2 .

$\boxed{5}$ On considère un nombre réel a tel que $0 < a < 1$.

Démontrer que $a^4 < a^3$.

$\boxed{6}$ A chaque question est affecté un certain nombre de points.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Pour chaque question proposée le nombre d'affirmations exactes peut varier de 0 à 4.
Le candidat doit cocher les cases correspondant aux réponses exactes.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.
Aucune justification n'est demandée.

1° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{-2 \leq a \leq 1}$ On peut affirmer que :

□ $2 - 3a \geq -1$ □ $2a + 3 \geq 5$ □ $2a - 5 \leq -2$ □ $a - 3 \geq 1$

2° Soit a un réel **strictement négatif.** On peut affirmer que :

□ $\dfrac{1}{5a} \geq \dfrac{3}{5a}$ □ $\dfrac{a}{5} \geq \dfrac{a}{7}$ □ $3a^2 \leq 2a^2$ □ $3a \leq 2a$

3° Soit x un réel vérifiant : $\mathbf{x > 1}$. On peut affirmer que :

$\dfrac{x}{1-x} > \dfrac{x+1}{1-x}$ □ $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1+x}{x-1}$ □ □ $\dfrac{1}{x-1} \geq 0$ □ $3(1-x) < 5(1-x)$

4° Soit x et y sont deux réels tels que : $0 < x \leq y$. On peut affirmer que:

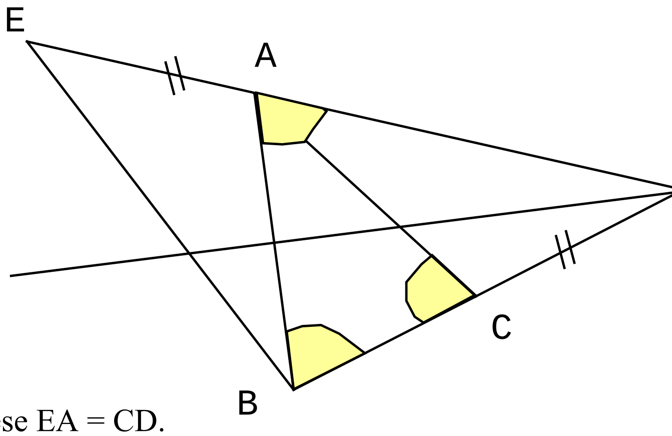
□ $x - 3y \geq 3x - y$ □ $\dfrac{1}{x+2y} \leq \dfrac{1}{2x+y}$ □ $2x + 3y \leq 3x + 2y$ □ $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{y+1}$

5° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{0 < a < 1}$. On peut affirmer que

□ $\dfrac{1}{a} < a^2$ □ $\dfrac{1}{a^2} > a$ □ $\dfrac{1}{a} > a$ □ $a^2 \leq a^3$

Nom

1 **Construire un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 4 cm, et l'angle $\widehat{BAC}$ ait pour mesure 40°.**
La médiatrice de [AB] coupe la droite (BC) en D . On trace la droite (DA) et sur la demi-droite d'origine A ne contenant pas le point D on place E tel que : AE = CD a) Montrer que DAB est un triangle isocèle, puis établir l'égalité des angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{ACD}$.



D est sur la médiatrice de [AB] donc le triangle ADB est isocèle en D donc les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABD}$ ont la même mesure.
Par hypothèse le triangle ABC est isocèle en A
donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont de même mesure
On a donc $\widehat{BCA} = \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{DAB}$.
de plus $\widehat{EAB} = 180° - \widehat{DAB} = 180° - \widehat{BCA} = \widehat{ACD}$

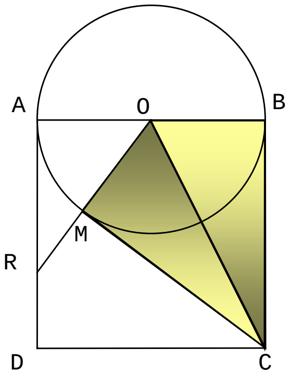
b) Comparer les triangles BAE et ACD .
En déduire que le triangle BDE est isocèle.

Par hypothèse le triangle ABC est isocèle en A donc AB = AC
de plus $\widehat{EAB} = 180° - \widehat{DAB} = 180° - \widehat{BCA} = \widehat{ACD}$ Par hypothèse EA = CD.

$$\left.\begin{array}{c} AB = AC \\ EA = CD \\ \widehat{EAB} = \widehat{ACD} \end{array}\right\}$$ donc les triangles $\begin{array}{c} EAB \\ DCA \end{array}$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l} \text{E et D sont homologues} \\ \text{A et C sont homologues} \\ \text{B et A sont homologues} \end{array}\right.$

Les triangles $\begin{array}{c} EAB \\ DCA \end{array}$ sont isométriques ils ont donc en commun les longueurs de leurs trois côtés
On peut donc dire que : EB = DA
On sait que ABD est isocèle en D donc DA = DB
On a donc EB = DB on peut donc dire que le triangle EBD est isocèle en B.

$\boxed{2}$ Soit ABCD un carré et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB]. La tangente au cercle $\mathscr{C}$ issue de C coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M. la droite (OM) coupe le segment [AD] en R.



1° Démontrer que les triangles OBC et OMC sont isométriques

La droite (CM) est tangente en M au cercle elle est donc perpendiculaire au rayon (OM) donc $\widehat{OMC} = 90°$

ABCD est un carré donc (BC) ⊥ (BA) donc $\widehat{OBC} = 90°$

OM et OB sont deux rayon d'un même cercle donc OM = OB

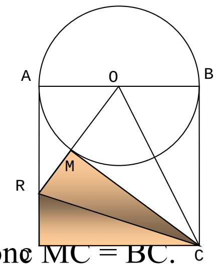
Dans le triangle OBC rectangle en B d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = OC^2 - BO^2$

Dans le triangle OMC rectangle en M d'après le théorème de Pythagore : $MC^2 = OC^2 - MO^2$

On a vu que OB = OM on a donc BC = MC

$\left.\begin{array}{c} OM = OB \\ OC = OC \\ MC = BC \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} OMC \\ OBC \end{array}$ ont en commun les longueurs de leurs trois côtés ils sont donc isométriques et

$\left\{\begin{array}{l} \text{O et O sont homologues} \\ \text{M et C sont homologues} \\ \text{C et C sont homologues} \end{array}\right.$



2° a) Démontrer que CMR et DCR sont isométriques.

ABCD est un carré donc $\widehat{RDC} = 90°$ On a vu que (CM) ⊥ (OM) donc $\widehat{RMC} = 90°$

Les triangles $\begin{array}{c} OMC \\ OBC \end{array}$ sont isométriques donc ils ont en commun les longueurs de leurs côtés donc MC = BC.

Comme de plus ABCD est un carré donc BC = CD

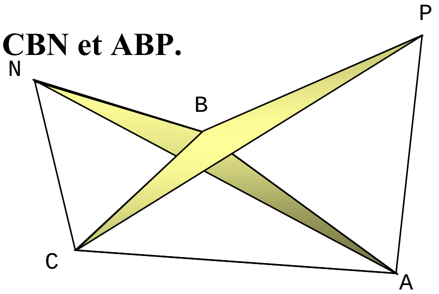
$\left.\begin{array}{c} \widehat{RDC} = \widehat{RMC} \\ MC = CD \\ RC = RC \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} RDC \\ RMC \end{array}$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l} \text{R et R sont homologues} \\ \text{D et M sont homologues} \\ \text{C et C sont homologues} \end{array}\right.$

b) En déduire la nature du triangle DMR.

Les triangles $\begin{array}{c} RDC \\ RMC \end{array}$ sont isométriques donc ils ont en commun les longueurs de leurs côtés donc RE = RD donc le triangle RMD est isocèle en R.

3 **A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux CBN et ABP.**

Montrer, à l'aide de triangles isométriques, que l'on a AN = CP.



BCN est équilatéral donc BN = BC et $\widehat{NBC} = 60°$

;ABP est équilatéral donc BA = BP et $\widehat{PBA} = 60°$

$\widehat{NBA} = \widehat{NBC} + \widehat{CBA} = 60° + \widehat{CBA} = \widehat{PBA} + \widehat{CBA} = \widehat{CBP}$

$\left.\begin{array}{c}\widehat{NBA} = \widehat{CBP} \\ BN = BC \\ BA = BP\end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c}NBA \\ CBP\end{array}$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ils sont

donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l}\text{N et C sont homologues} \\ \text{B et B sont homologues} \\ \text{A et P sont homologues}\end{array}\right.$

Les triangles $\begin{array}{c}NBA \\ CBP\end{array}$ sont isométriques ils ont donc en commun les longueurs de leurs trois côtés donc AN = CP

4 **Sur un segment [AB] de longueur 4 cm, on place un point I, et on appelle x la longueur AI.**

On trace les carrés AIJK et IBLM.

1° Démontrer que la surface S des deux carrés réunis vaut $S = 2x^2 - 8x + 16$.

$S = AI^2 + IB^2 = x^2 + (4 - x)^2 = x^2 + 16 - 8x + x^2 = 2x^2 - 8x + 16$.

2° Factoriser S – 8, et en déduire que la surface S est toujours supérieure ou égale à 8 cm² .

Peut-elle être égale à 8 cm² ? Pour quelle position de I ?

$S - 8 = 2x^2 - 8x + 16 - 8 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$

Pour tout réel x, $(x - 2)^2 \geq 0$ donc $S \geq 8$

$S = 8 \Leftrightarrow 2(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Si x = 2 alors I est le milieu de [AB].

3° Démontrer que $S - 10 = 2(x - 1)(x - 3)$. En déduire les valeurs de x telles que S = 10 cm²

$S - 10 = 2x^2 - 8x + 16 - 10 = 2x^2 - 8x + 6$

$2(x - 1)(x - 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x^2 - 8x + 6$. On a donc $S - 10 = 2(x - 1)(x - 3)$

$S = 10 \Leftrightarrow 2(x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

4° Compléter le tableau de signe suivant

x	0		1		3		4
x – 1		–	0	+		+	
x – 3		–		–	0	+	
S – 10		+	0	–	0	+	

En déduire les valeurs de x telles que S ≤ 10 cm² .

$x \in [1, 3]$

5 **On considère un nombre réel a tel que 0 < a < 1.**

Démontrer que $a^4 < a^3$.

$a^4 - a^3 = a^3(a - 1)$ On sait que $a > 0$ donc $a^3 > 0$

$a < 1$ donc $a - 1 < 0$

$\left.\begin{array}{c}a^3 > 0 \\ a - 1 < 0\end{array}\right\}$ donc $a^3(a - 1) < 0$ donc $a^4 < a^3$

$\boxed{6}$ A chaque question est affecté un certain nombre de points.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Pour chaque question proposée le nombre d'affirmations exactes peut varier de 0 à 4.
Le candidat doit cocher les cases correspondant aux réponses exactes.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.
Aucune justification n'est demandée.

1° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{-2 \leq a \leq 1}$ On peut affirmer que :

□ $2 - 3a \geq -1$ □ $2a - 5 \leq -2$ □ $a - 3 \geq 1$ □ $2a + 3 \geq 5$

2° Soit a un réel **strictement négatif.** On peut affirmer que :

□ $\frac{1}{6a} \geq \frac{5}{6a}$ □ $\frac{a}{9} \geq \frac{a}{7}$ □ $3a \leq 2a$ □ $3a^2 \leq 2a^2$

3° Soit x un réel vérifiant : $\mathbf{x > 1}$. On peut affirmer que :

□ $\frac{1}{x-1} \geq 0$ □ $\frac{x}{x-1} > \frac{1+x}{x-1}$ □ $\frac{x}{1-x} > \frac{x+1}{1-x}$ □ $3(1-x) < 5(1-x)$

4° Soit x et y sont deux réels tels que : $0 < x \leq y$. On peut affirmer que:

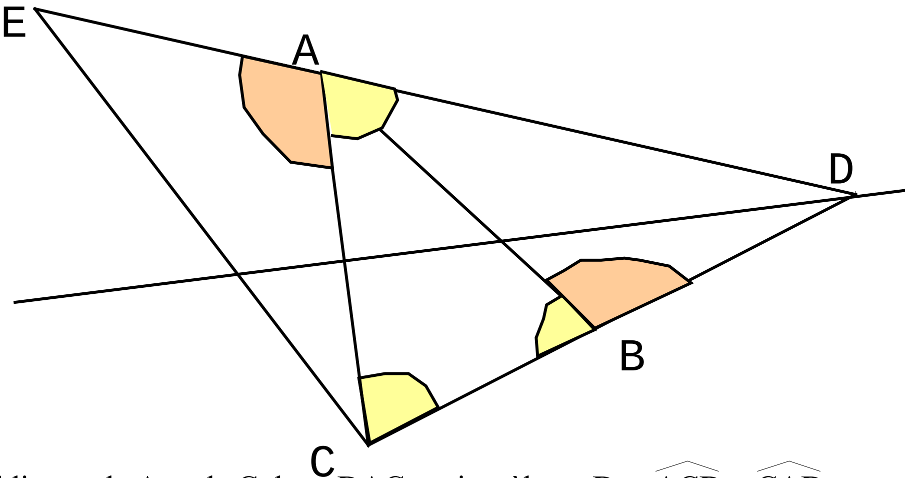
□ $2x + 3y \leq 3x + 2y$ □ $\frac{1}{x+2y} \leq \frac{1}{2x+y}$ □ $x - 3y \geq 3x - y$ □ $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{y+1}$

5° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{0 < a < 1}$. On peut affirmer que

□ $a^2 \leq a^3$ □ $\frac{1}{a} < a^2$ □ $\frac{1}{a} > a$ □ $\frac{1}{a^2} > a$

Nom

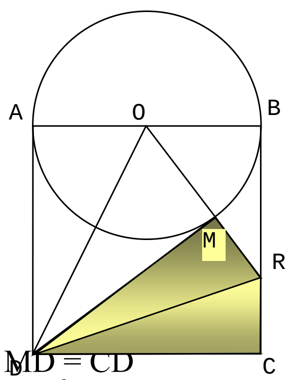
1 Construire un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 5 cm,
et l'angle $\widehat{BAC}$ ait pour mesure 40°.
La médiatrice de [AC] coupe la droite (BC) en D .
On trace la droite (DA) et sur la demi-droite d'origine A ne contenant pas le point D on place E tel que : AE = BD
a) Montrer que DAC est un triangle isocèle, puis établir l'égalité des angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ABD}$



D est sur la médiatrice de [AC] donc D est équidistant de A et de C donc DAC est isocèle en D et $\widehat{ACD} = \widehat{CAD}$
b) Comparer les triangles CAE et ABD . En déduire que le triangle CDE est isocèle.
Par hypothèse le triangle ABC est isocèle en A donc AB = AC
et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont de même mesure On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{ACD} = \widehat{DAC}$.
de plus $\widehat{EAC} = 180° - \widehat{DAC} = 180° - \widehat{ABC} = \widehat{ABD}$ Par hypothèse EA = BD.

$\left.\begin{array}{c} AB = AC \\ EA = BD \\ \widehat{EAC} = \widehat{ABD} \end{array}\right\}$ donc les triangles $\begin{array}{c} EAC \\ DBA \end{array}$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l} \text{E et D sont homologues} \\ \text{A et B sont homologues} \\ \text{C et A sont homologues} \end{array}\right.$ Les triangles $\begin{array}{c} EAC \\ DBA \end{array}$ sont isométriques ils ont donc en commun les longueurs de leurs trois côtés donc EC = DA
On sait que ACD est isocèle en D donc DA = DC. On a donc EC = DC donc le triangle ECD est isocèle en C.

2 Soit ABCD un carré et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB]. La tangente au cercle $\mathscr{C}$ issue de D coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M. la droite (OM) coupe le segment [BC] en R. 1° Démontrer que les triangles OAD et OMD sont isométriques. La droite (DM) est tangente en M au cercle elle est donc perpendiculaire au rayon (OM) donc $\widehat{OMC} = 90°$ ABCD est un carré donc (AD) ⊥ (BA) donc $\widehat{DAC} = 90°$
OM et OA sont deux rayon d'un même cercle donc OM = OA
Dans le triangle OAD rectangle en A on a d'après le théorème de Pythagore $AD^2 = OD^2 - OA^2$
Dans le triangle OMD rectangle en M on a d'après le théorème de Pythagore $MD^2 = OD^2 - OM^2$
On a vu que OM = OA on peut donc dire que AD = MD



$\left.\begin{array}{c} OM = OA \\ OD = OD \\ AD = MD \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} OMD \\ OAD \end{array}$ ont en commun les longueurs de leurs trois côtés

ils sont donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l} \text{O et O sont homologues} \\ \text{M et A sont homologues} \\ \text{D et D sont homologues} \end{array}\right.$

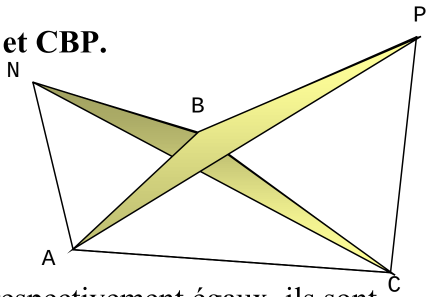
2° a) Démontrer que DMR et DCR sont isométriques.
ABCD est un carré donc $\widehat{RCD} = 90°$ On a vu que (DM) ⊥ (OM) donc $\widehat{RMD} = 90°$
On a démontrer que MD = AD. Comme de plus ABCD est un carré on a AD = CD donc MD = CD
Dans le triangle OCD rectangle en C on a d'après le théorème de Pythagore $RC^2 = RD^2 - DC^2$
Dans le triangle OMR rectangle en M on a d'après le théorème de Pythagore $MR^2 = RD^2 - DM^2$

On a vu que DM = DC on peut donc dire que RC = DC. $\left.\begin{array}{c} \widehat{RMD} = \widehat{RCD} \\ MR = RC \\ RD = RD \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} RMD \\ RCD \end{array}$ ont en commun la mesure d'un angle et les longueurs des côtés qui lui sont adjacents ils sont isométriques $\left\{\begin{array}{l} \text{R et R homologues} \\ \text{C et M homologues} \\ \text{D et D homologues} \end{array}\right.$

b) En déduire la nature du triangle CMR.
Les triangles $\begin{array}{c} RMD \\ RCD \end{array}$ sont isométriques donc ils ont en commun les longueurs de leurs côtés donc RM = RC donc le triangle RMC est isocèle en R.

$\boxed{3}$ **Problème ouvert :**

A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux BAN et CBP.
Montrer, à l'aide de triangles isométriques, que l'on a CN = AP.



BAN est équilatéral donc BN = BA et $\widehat{NBA} = 60°$

CBP est équilatéral donc BC = BP et $\widehat{PBC} = 60°$

$\widehat{NBC} = \widehat{NBA} + \widehat{ABC} = 60° + \widehat{ABC} = \widehat{CBP} + \widehat{CBA} = \widehat{ABP}$

$\left.\begin{array}{c} \widehat{NBC} = \widehat{ABP} \\ BN = BA \\ BC = BP \end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c} NBC \\ ABP \end{array}$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ils sont

donc isométriques et $\left\{\begin{array}{l} \text{N et A sont homologues} \\ \text{B et B sont homologues} \\ \text{C et P sont homologues} \end{array}\right.$

Les triangles $\begin{array}{c} NBC \\ ABP \end{array}$ sont isométriques ils ont donc en commun les longueurs de leurs trois côtés donc CN = AP

$\boxed{4}$ **Sur un segment [AB] de longueur 6 cm, on place un point I, et on appelle x la longueur AI.**
On trace les carrés AIJK et IBLM.
1° Démontrer que la surface S des deux carrés réunis vaut $S = 2x^2 - 12x + 36$.

$S = AI^2 + BI^2 = x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$

2° Factoriser S – 18, et en déduire que la surface S est toujours supérieure ou égale à 18 cm^2 .
Peut-elle être égale à 18 cm^2 ? Pour quelle position de I ?

$S - 18 = 2x^2 - 12x + 36 - 18 = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$

Pour tout réel x, $(x - 2)^2 \geq 0$ donc $S \geq 8$

$S = 18 \Leftrightarrow 2(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Si x = 3 alors I est le milieu de [AB].

3° Démontrer que $S - 20 = 2(x - 2)(x - 4)$. En déduire les valeurs de x telles que S = 20 cm^2

$S - 20 = 2x^2 - 12x + 36 - 20 = 2x^2 - 12x + 16$

$2(x - 2)(x - 4) = 2(x^2 - 4x - 2x + 8) = 2(x^2 - 6x + 8) = 2x^2 - 12x + 16$

On a donc bien : $S - 20 = 2(x - 2)(x - 4)$

$S = 20 = 0 \Leftrightarrow S - 20 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$

4° Compléter le tableau de signe suivant

x	0		2		4		6
x – 2		–	0	+		+	
x – 4		–		–	0	+	
S – 20		+	0	–	0	+	

En déduire les valeurs de x telles que S ≤ 20 cm^2 .

$S \leq 20 \Leftrightarrow S - 20 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 4]$

$\boxed{5}$ **On considère un nombre réel a tel que 0 < a < 1.**
Démontrer que $a^4 < a^3$.

$a^4 - a^3 = a^3(a - 1)$ On sait que $a > 0$ donc $a^3 > 0$

$a < 1$ donc $a - 1 < 0$

$\left.\begin{array}{c} a^3 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{array}\right\}$ donc $a^3(a - 1) < 0$ donc $a^4 < a^3$

$\boxed{6}$ A chaque question est affecté un certain nombre de points.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Pour chaque question proposée le nombre d'affirmations exactes peut varier de 0 à 4.
Le candidat doit cocher les cases correspondant aux réponses exactes.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.
Aucune justification n'est demandée.

1° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{-2 \leq a \leq 1}$ On peut affirmer que :

□ $2 - 3a \geq -1$ □ $2a + 3 \geq 5$ □ $2a - 5 \leq -2$ □ $a - 3 \geq 1$

2° Soit a un réel **strictement négatif.** On peut affirmer que :

□ $\frac{1}{5a} \geq \frac{3}{5a}$ □ $\frac{a}{5} \geq \frac{a}{7}$ □ $3a^2 \leq 2a^2$ □ $3a \leq 2a$

3° Soit x un réel vérifiant : $\mathbf{x > 1}$. On peut affirmer que :

$\frac{x}{1-x} > \frac{x+1}{1-x}$ □ $\frac{x}{x-1} > \frac{1+x}{x-1}$ □ □ $\frac{1}{x-1} \geq 0$ □ $3(1-x) < 5(1-x)$

4° Soit x et y sont deux réels tels que : $0 < x \leq y$. On peut affirmer que:

□ $x - 3y \geq 3x - y$ □ $\frac{1}{x+2y} \leq \frac{1}{2x+y}$ □ $2x + 3y \leq 3x + 2y$ □ $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{y+1}$

5° Soit a un réel vérifiant : $\mathbf{0 < a < 1}$. On peut affirmer que

□ $\frac{1}{a} < a^2$ □ $\frac{1}{a^2} > a$ □ $\frac{1}{a} > a$ □ $a^2 \leq a^3$

Nom