

1 ABC est un triangle isocèle de sommet A . H est le pied de la hauteur issue de A .

On donne $BC = 160 \text{ mm}$ et $AH = 60 \text{ mm}$.

1° a) Faire une figure.

b) Calculer AB et AC.

2° a) D est le point de [BC] tel que $BD = 35 \text{ mm}$ et E est le point de [BA] tel que $BE = 56 \text{ mm}$.

Démontrer que les triangles BAC et BDE sont semblables.
Quelle est la valeur de ED ?

b) Calculer AD , en utilisant le triangle ADH .

c) Prouver alors que le triangle DAC est rectangle en A

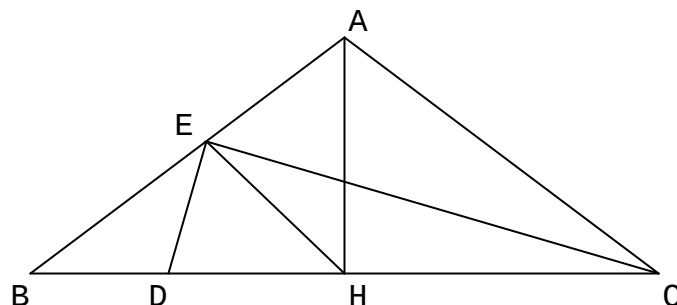
3° Soit K le projeté orthogonal de E sur la droite (BC)

a) Calculer les valeurs de EK et BK

b) Démontrer que : $EC = 120 \text{ mm}$.

c) Prouver alors que le triangle DEC est rectangle en E

4° Prouver que les points E , A , C , D sont sur un même cercle dont on donnera le diamètre.



2 Deux cercles (Γ) et (Γ') de centres O et O' , de rayons R et R' , sont tangents extérieurement en A. Les points B et C sont diamétralement opposés, sur (Γ) . Les droites (BA) et (CA) recoupent (Γ') en B' et C' .

1° a) Quelle est la nature du triangle OAB ? du triangle O' A B' ?

Montrer que ces deux triangles sont semblables.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

du triangle A B' C' ?

Montrer que B' et C' sont diamétralement opposés.

c) Prouver, à l'aide des questions a) et b), que les triangles ABC et A B' C' sont semblables, et que les droites (BC) et (B' C') sont parallèles.

2° Dans cette question le triangle AOC est équilatéral et $OA = 4 \text{ cm}$ et $O'A = 2 \text{ cm}$

a) Faire la figure.

b) Quelle est la nature du triangle AO' C' ?

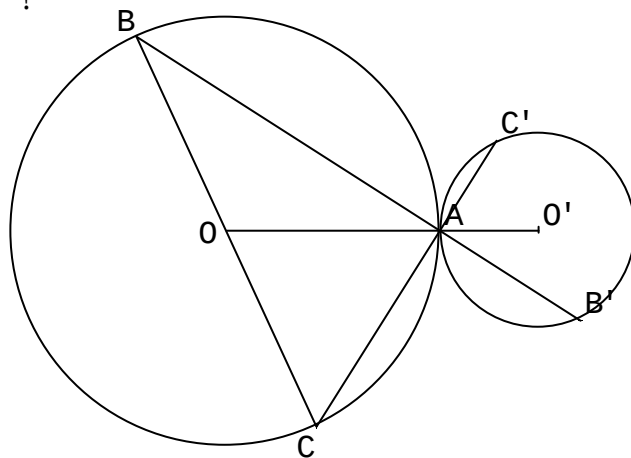
c) Calculer AB et AB' ?

d) Soit H le projeté orthogonal de B Sur (AO). Calculer BH

e) La droite (BH) recoupe le cercle (Γ) en K. La droite (AK) recoupe le cercle (Γ) en K' ?

Démontrer que le triangle A B K est équilatéral.

Quelle est la nature du triangle A B' K' ?



1° b) $AB^2 = 80^2 + 60^2 = 100^2$ donc $AB = AC = 100$.

2° a) $\widehat{DBE} = \widehat{ABC}$, $\frac{BD}{BA} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ et $\frac{BE}{BC} = \frac{56}{160} = \frac{7}{20}$. Les triangles DBE et ABC ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement proportionnels ils sont donc semblables avec B et B homologues, D et A homologues et E et C homologues. Leurs côtés sont donc respectivement proportionnels et donc : $\frac{ED}{CA} = \frac{7}{20}$

donc $\frac{ED}{100} = \frac{7}{20}$ donc $ED = 35$.

b) $DH = 80 - 35 = 45$ et $AH = 60$. Le triangle ADH est rectangle en H donc : $AD^2 = 35^2 + 60^2$. Donc $AD = 75$.
c) $AC^2 + AD^2 = 100^2 + 75^2 = 15625$ et $DC^2 = (160 - 35)^2 = 125^2 = 15625$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ADC est donc rectangle en A.

3° Les points B, E et A sont alignés, les points B, K et H sont alignés, $(EK) \parallel (AH)$ on peut donc appliquer le théorème de Thalès : $\frac{EK}{AH} = \frac{BK}{BH} = \frac{BE}{BA}$, $\frac{EK}{60} = \frac{56}{100}$ donc $EK = \frac{168}{5}$, $\frac{BK}{80} = \frac{56}{100}$ donc $BK = \frac{224}{5}$

b) DEC rectangle en E donc $EC^2 = EK^2 + KC^2 = \left(\frac{168}{5}\right)^2 + \left(160 - \frac{224}{5}\right)^2 = 14400$ donc $EC = 120$.

c) $ED^2 + EC^2 = 35^2 + 120^2 = 15625$ et $DC^2 = 125^2 = 15625$. D'après la réciproque de Pythagore EDC est rectangle en E.

2° 1° a) OAB est isocèle en O et O'A'B' est isocèle en O'.

$\widehat{BAO} = \widehat{B'AO'}$ car ils sont opposés par le sommet. $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \widehat{O'AB'} = \widehat{AB'O'}$

Les triangles OAB et O'AB' ont deux angles respectivement égaux ils sont donc semblables avec A et A homologues, O et O' homologues et B et B' homologues (on peut dire aussi A et B' homologues, B et A homologues et O et O' homologues).

OAB et O'AB' sont semblables donc $\widehat{AOB} = \widehat{AO'B'}$. La droite (∞) coupe les droites (AO) et (AO'), les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B'}$ sont en position d'angle alterne interne et ils sont égaux on a donc $(OB) \parallel (O'B')$.

On démontrera de même que $(OC) \parallel (O'C')$. $(OB) = (OC)$ donc $(O'B') \parallel (O'C')$ donc O', B' et C' sont alignés.

2° AOC et AO'C' sont semblable donc si AOC est équilatéral alors AO'C' aussi.

A est sur le cercle de diamètre [BC] donc ABC est rectangle en A On a donc : $AB^2 = AC^2 - AC^2 = 8^2 - 4^2$ donc

$AB = 4\sqrt{3}$. $\frac{AB'}{AB} = \frac{AO'}{AO} = \frac{2}{4}$ donc $AB' = 2\sqrt{3}$

d) $\widehat{OAB} = 90^\circ - \widehat{OAC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

ABH est rectangle en H.

On a $\sin \widehat{HAB} = \frac{BH}{BA}$ donc $BH = BA \times \sin 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

e) ABH est rectangle en H donc $\widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{HAB} = 60^\circ$

$\widehat{AOB} = 180^\circ - 2 \times \widehat{OBA} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Dans le cercle C l'angle inscrit $\widehat{BKA}$ est égal à la moitié de l'angle au centre associé $\widehat{AOB}$ donc $\widehat{BKA} = 60^\circ$

Le triangle BKA a deux angles égaux à 60° il est donc équilatéral.

$\widehat{B'AK'} = \widehat{KAB} = 60^\circ$

Dans le cercle C' l'angle inscrit $\widehat{AK'B'}$ est égal à la moitié de l'angle au centre associé $\widehat{AO'B'}$ $\widehat{AO'B'} = \widehat{AOB} = 120^\circ$ et donc $\widehat{AK'B'} = 60^\circ = 60^\circ$

Le triangle AB'K' a deux angles égaux à 60° il est donc équilatéral.

