2°10 **Devoir surveillé n°5** Vendredi 26 janvier 2006

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ 2 points

Ecrire sans valeur absolue (2 points)

$\lvert 2\sqrt{2} - 7 \rvert$	$\lvert 2\pi - 3\sqrt{3} \rvert$	$\lvert 10^{-4} - 10^{-7} \rvert$	$\left\lvert -\frac{1}{3} - \sqrt{3} \right\rvert$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ (4 points)

1° Résoudre l'équation : $\lvert x - 2 \rvert = 3$.
2° Résoudre l'inéquation : $\lvert x + 1 \rvert \leq 2$.
3° Traduire à l'aide d'une valeur absolue : $x \in \left]1 ; 6\right[$

$\boxed{\text{Problème}}$ (14 points)

Fonction issue d'une situation géométrique
On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que AB= 4 cm.
Soit F le milieu de [AC] Soit M un point libre sur [AB]
La perpendiculaire à (AB) issue de M, coupe (BC) en E.
On s'intéresse à la fonction f qui à x = MB associe l'aire y du polygone EFAM et à la fonction d qui à x = MB associe l'aire du triangle ABE.

Partie A Recherche de f.

1° Quel est l'ensemble de définition des fonctions f et g ?
2° Montrer que le polygone EFAM est un trapèze
3° Calculer EM en fonction de x.

En déduire que $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(4 - x)$, où f(x) est l' aire du trapèze EFAM.

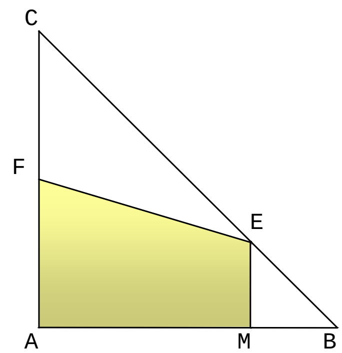
Démontrer que g(x) = 2 x où g(x) est l'aire du triangle ABE

Partie B Lecture graphique.

On a représenté ci-contre la fonction f.
1° Tracer la représentation graphique de la fonction g sur le même graphique
2° Déterminer graphiquement les images par f de 1 et de 3.

3° Déterminer graphiquement les antécédents de 4 et ceux de $\frac{5}{2}$ pour f.

4° Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leq \frac{5}{2}$.



Partie C Calculs.

1° Nouvelle expression de f(x).

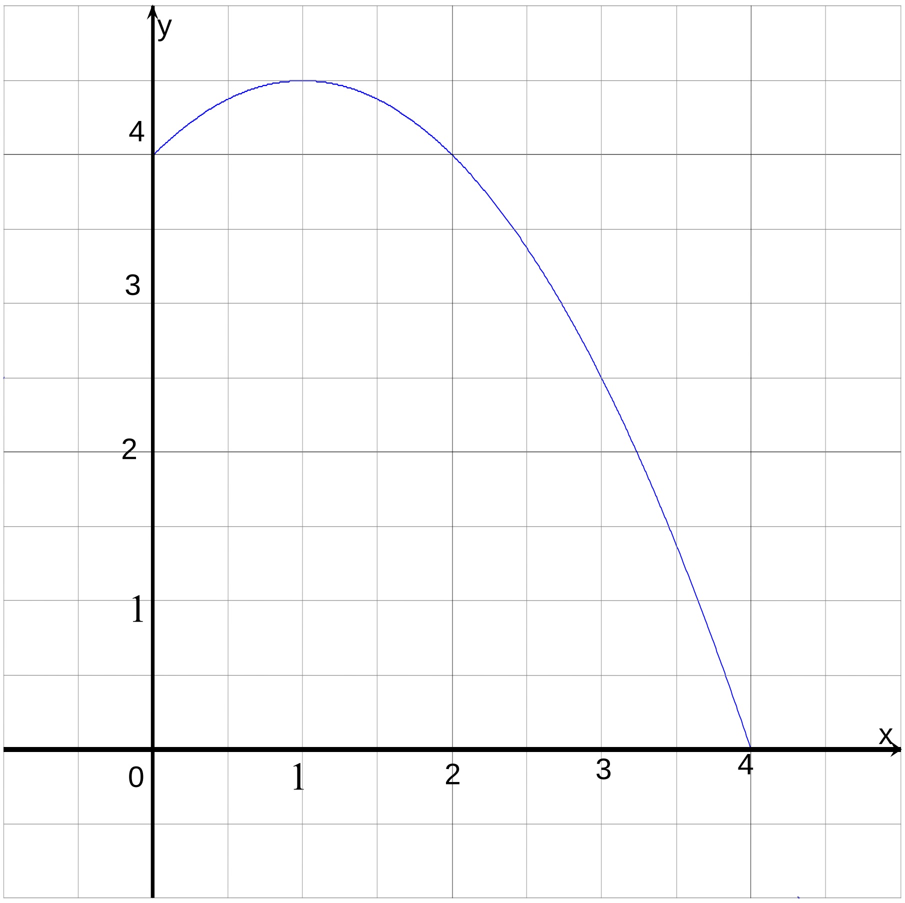
Développer l'expression $\frac{1}{2}(9 - (x - 1)^2)$

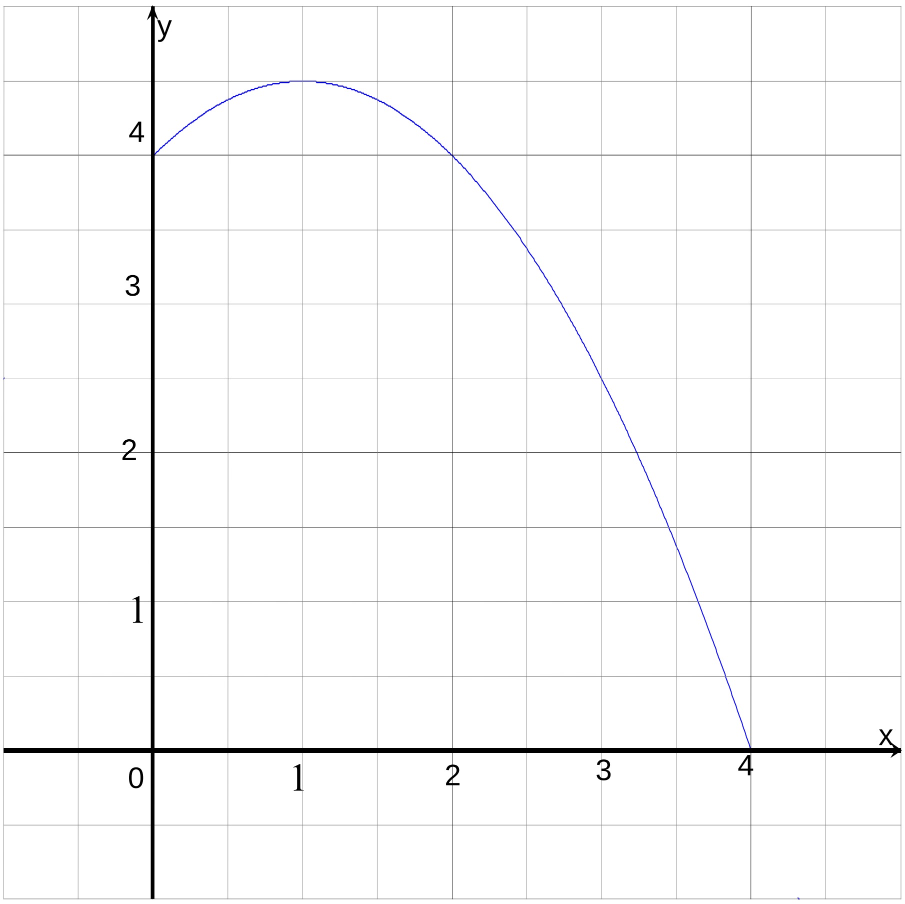
Développer f(x) et montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(9 - (x - 1)^2)$

2° Déterminer, par le calcul l'image de 1.
3° Déterminer par le calcul les antécédents de 4 et ceux de 0.

4° Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq \frac{9}{2}$.

Nom____





Exercice 1 **Ecrire sans valeur absolue (2 points)**

$\lvert 2\sqrt{2} - 7 \rvert = 7 - 2\sqrt{2}$	$\lvert 2\pi - 3\sqrt{3} \rvert = 2\pi - 3\sqrt{3}$	$\lvert 10^{-4} - 10^{-7} \rvert = 10^{-4} - 10^{-7}$	$\left\lvert -\frac{1}{3} - \sqrt{3} \right\rvert = \frac{1}{3} + \sqrt{3}$

Exercice 2 **1° Résoudre l'équation : | x – 2 | = 3.**

$| x - 2 | = 3 \Leftrightarrow x = 2 + 3$ ou $x = 2 - 3 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -1$. S = { – 1 ,54 }

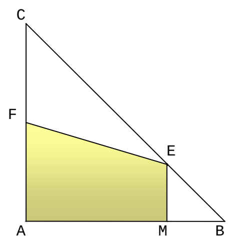
2° Résoudre l'inéquation : | x + 1 | ≤ 2.

$| x + 1 | \leq 2 \Leftrightarrow -1 - 2 \leq x \leq -1 + 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \quad S = [-3 , 1]$

3° Traduire à l'aide d'une valeur absolue : x ∈] 1 ; 6 [

$x \in \,]1 ; 6[\, \Leftrightarrow \left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{5}{2} \qquad \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$ et $\frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$

Problème **Fonction issue d'une situation géométrique On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que AB= 4 cm. Soit F le milieu de [AC] Soit M un point libre sur [AB] La perpendiculaire à (AB) issue de M, coupe (BC) en E. On s'intéresse à la fonction f qui à x = MB associe l'aire y du polygone EFAM et à la fonction d qui à x = MB associe l'aire du triangle ABE.** **Partie A** **Recherche de f.**



1° Quel est l'ensemble de définition des fonctions f et g ?

$x = BM$ et $M \in [AB]$ donc $0 \leq BM \leq BA$. $D_f = D_g = [0 , 4]$

2° Montrer que le polygone EFAM est un trapèze

ABC rectangle en A donc (AC) ⊥ (AB).

E est sur la perpendiculaire à (AB) issue de M donc (EM) ⊥ (AB)

$\left.\begin{array}{l}(AC) \perp (AB)\\(EM) \perp (AB)\end{array}\right\}$ donc (AC) // (EM) donc (EM) // (AF) donc EFAM est un trapèze

3° Calculer EM en fonction de x. En déduire que $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(4 - x)$, où f(x) est l' aire du trapèze EFAM.

Démontrer que g(x) = 2 x où g(x) est l'aire du triangle ABE

ABC est rectangle isocèle en A donc $\widehat{BAC} = 90°$ et $\widehat{ABC} = 45°$

On sait que (EM) ⊥ (AB) donc $\widehat{EMB} = 90°$. de plus $\widehat{MBE} = \widehat{ABC} = 45°$

$\left.\begin{array}{l}\widehat{EMB} = \widehat{BAC}\\\widehat{MBE} = \widehat{ABC}\end{array}\right\}$ les triangles $\begin{array}{c}EMB\\CAB\end{array}$ ont en commun les mesures de deux angles ils sont donc semblables.

EMB est rectangle isocèle en M donc ME = MB = x.

$$\mathscr{A}(EFAM) = \frac{1}{2}(AF + EM) \times AM = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2} + x\right) \times (AB - BM) = \frac{1}{2}(2 + x) \times (4 - x)$$

$$\mathscr{A}\ ABE = \frac{1}{2} AB \times EM = \frac{1}{2} \times 4 \times x = 2\,x.$$

Partie B **Lecture graphique. On a représenté ci-contre la fonction f. 1° Tracer la représentation graphique de la fonction g sur le même graphique 2° Déterminer graphiquement les images de 1 et de 3.**

L'image de 1 par f est : f(1) = 4,5 **L'image de 3 par f est : f(3) = 2,5**

3° Déterminer graphiquement les antécédents de 4 et ceux de $\frac{5}{2}$.

4 a deux antécédents : 0 et 2. $\frac{5}{2}$ **a un antécédent : 3**

4° Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leq \frac{5}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq \frac{5}{2}$ est : S = [3 , 4]

Partie C Calculs. 1°Nouvelle expression de f(x). Développer $\frac{1}{2}(9-(x-1)^2)$ Développer f(x) et montrer que $f(x)=\frac{1}{2}(9-(x-1)^2)$

$\frac{1}{2}(9-(x-1)^2)=\frac{1}{2}(9-x^2+2x-1)=\frac{1}{2}(8+2x-x^2)=4+x-\frac{x^2}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)(4-x)=\frac{1}{2}(4x-x^2+8-2x)=\frac{1}{2}(8+2x-x^2)=\frac{1}{2}(9-(x-1)^2)$

2° Déterminer, par le calcul l'image de 1.

$f(1)=\frac{1}{2}(8+2-1)=\frac{9}{2}=4,5.$

L'image de 1 par f est : 4,5.

3° Déterminer par le calcul les antécédents de 4 et ceux de 0.

$f(x)=4 \Leftrightarrow 4+x-\frac{x^2}{2}=4 \Leftrightarrow x-\frac{x^2}{2}=0 \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.

Les antécédents de 4 sont donc 0 et 2.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2+x)(4-x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=4$.

$-2 \notin D_f$ donc n'est pas un antécédent de 0. $4 \in D_f$ donc 0 admet un unique antécédent pour f : 4.

4° Résoudre l'inéquation : $f(x)\leq\frac{9}{2}$.

$f(x)\leq\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(9-(x-1)^2)\leq\frac{9}{2} \Leftrightarrow 9-(x-1)^2\leq 9 \Leftrightarrow -(x-1)^2\leq 0$. ce qui est vrai pour tout réel x de [0 ; 4]

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq\frac{9}{2}$ est : S = [0 ; 4]

Nom____