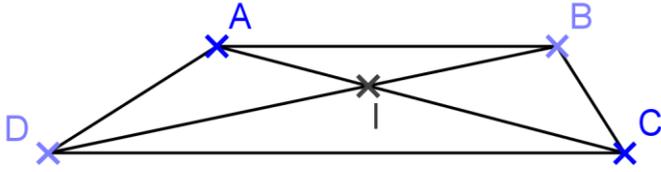


Devoir surveillé n°7

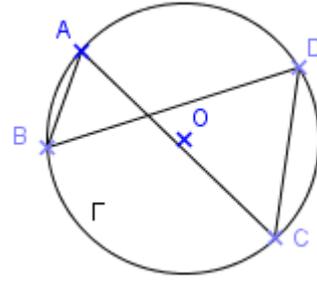
1 Reconnaître dans chacune des configurations suivantes les triangles semblables

(On indiquera la correspondance des angles)

ABCD est un trapèze



ABCD sont quatre points d'un cercle Γ .



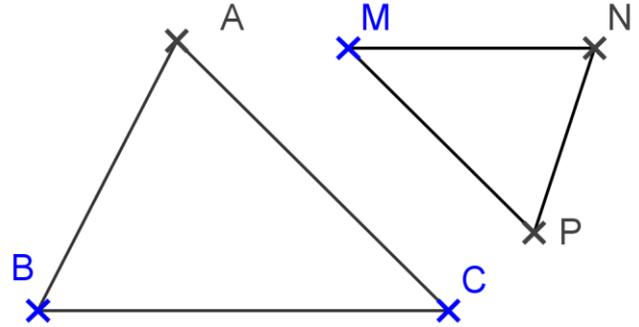
2 Soit deux triangles ABC et MNP

On donne : $BC = 5,4$, $\hat{A} = 72^\circ$, $\hat{B} = 63^\circ$, $\hat{M} = 45^\circ$ et $\hat{N} = 72^\circ$.

1° Montrer que les triangles ABC et MNP sont semblables

2° On donne de plus $AB = 4$ et $MP = 3,24$.

Calculer NP



3 Soit ABCD un carré de côté 4 cm, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD].

Les segments [AJ] et [BI] se coupent en M.

1° **Faire une figure.**

2° a) Montrer que les triangles ABI et ADJ sont isométriques.

b) En déduire que les triangles AMI et ADJ sont semblables.

c) Calculer $\frac{AI}{AJ}$

3° a) Calculer l'aire du triangle ADJ.

b) En déduire l'aire du triangle AIM puis du quadrilatère BMJC.

4 M, N, P, et q sont sur un cercle de centre O, les points A, P, O et Q

sont alignés, les points A, M et n sont alignés.

1° Démontrer que dans la figure suivante les triangles AMQ et AP N sont semblables.

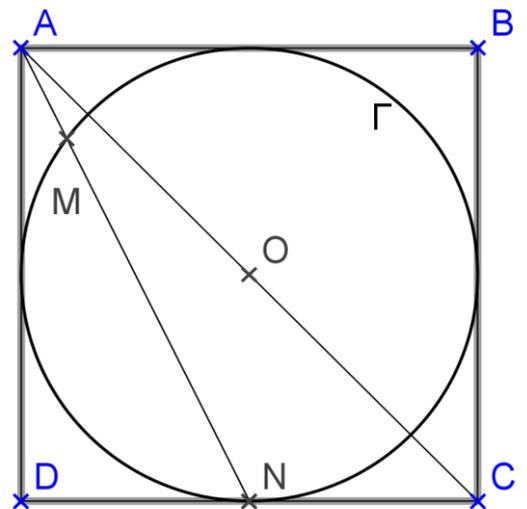
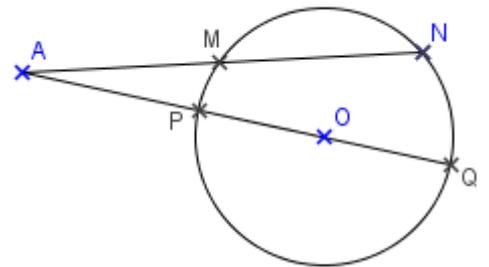
2° En déduire l'égalité $AM \times AN = AP \times AQ$

3° Démontrer que $AM \times AN = AO^2 - R^2$ ou R désigne le rayon du cercle.

4° Application :

Dans la figure ci-dessous, le cercle Γ est tangent aux côtés d'un carré de 6 cm de côté et C_1 est le milieu de [DC].

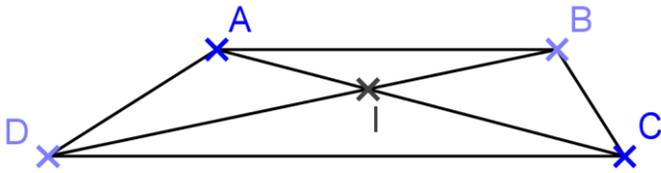
Calculer AM sachant que le carré ABCD a pour côté 6 cm.



1 Reconnaître dans chacune des configurations suivantes les triangles semblables 3 points

(On indiquera la correspondance des angles)

ABCD est un trapèze



ABI et DIC 1,5

ABI et DIC $\begin{cases} I \text{ et } I \\ A \text{ et } C \text{ homologues.} \\ B \text{ et } D \end{cases}$

2 Soit deux triangles ABC et MNP 4 points

On donne : $BC = 5,4$, $\hat{A} = 72^\circ$, $\hat{B} = 63^\circ$, $\hat{M} = 45^\circ$ et $\hat{N} = 72^\circ$.

1° Montrer que les triangles ABC et MNP sont semblables

$$\hat{C} = 180 - 72 - 63 = 45^\circ = \hat{M}$$

$$\hat{A} = 72^\circ = \hat{N}$$

les triangles ABC et MNP ont deux angles de même mesure, ils sont donc semblables.

$\begin{cases} A \text{ et } N \\ B \text{ et } P \text{ sont homologues.} \\ C \text{ et } M \end{cases}$ 2

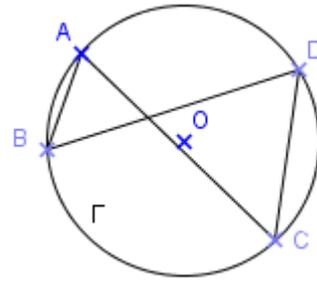
2° On donne de plus $AB = 4$ et $MP = 3,24$.

Calculer NP

les triangles ABC et MNP sont semblables donc les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

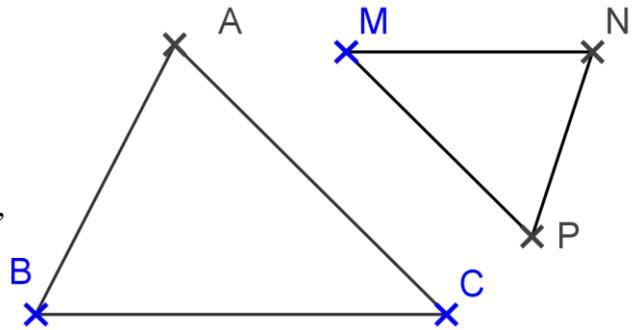
$$\frac{AB}{NP} = \frac{BC}{PM} = \frac{AC}{MN} \text{ donc } \frac{4}{NP} = \frac{5,4}{3,24} \Leftrightarrow NP = \frac{4 \times 3,24}{5,4} = 2,4. \quad \text{2}$$

ABCD sont quatre points d'un cercle Γ .



ABI et IDC 1,5

$\begin{cases} A \text{ et } D \\ I \text{ et } I \\ B \text{ et } C \end{cases}$



3 Soit ABCD un carré de côté 4 cm, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD]. 8 points

Les segments [AJ] et [BI] se coupent en M.

1° Faire une figure.

1

2° a) Montrer que les triangles ABI et ADJ sont isométriques.

$\begin{cases} AI = DJ \\ AB = AD \\ \hat{IAB} = 90^\circ = \hat{ADJ} \end{cases}$ Les triangles ABI et ADJ ont un angle égal compris entre

deux côtés respectivement de même longueur ils sont donc isométriques

$\begin{cases} A \text{ et } D \text{ sont homologues} \\ I \text{ et } J \text{ sont homologues} \\ B \text{ et } A \text{ sont homologues} \end{cases}$ 2

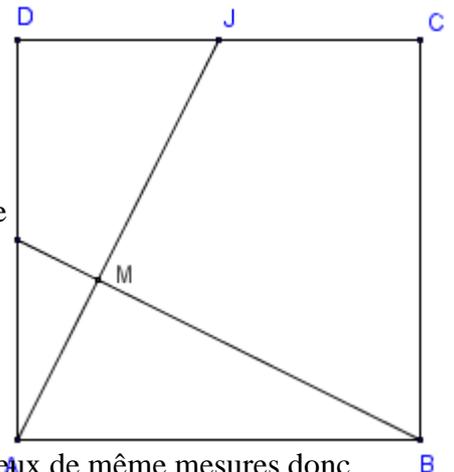
b) En déduire que les triangles AMI et ADJ sont semblables.

Les triangles ABI et ADJ sont isométriques ils ont donc leurs angles deux à deux de même mesure donc

$$\hat{AIM} = \hat{AJD}$$

On a donc $\begin{cases} \hat{AIM} = \hat{AJD} \\ \hat{IAM} = \hat{DAJ} \end{cases}$ Les triangles AIM et AJD ont deux angles de même mesure, ils sont donc semblables.

$\begin{cases} A \text{ et } A \text{ sont homologues} \\ I \text{ et } J \text{ sont homologues} \\ M \text{ et } D \text{ sont homologues} \end{cases}$ 2



c) Calculer $\frac{AI}{AJ}$

$$AI = \frac{AD}{2} = 2 \text{ cm}$$

dans le triangle AJD rectangle en D on a : $AJ^2 = AD^2 + DJ^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ donc $AJ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

$$\text{On a donc } \frac{AI}{AJ} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \boxed{1}$$

3° a) Calculer l'aire du triangle ADJ.

$$\text{ADJ est rectangle en D donc Aire (ADJ)} = \frac{1}{2} AD \times AJ = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 \text{ cm}^2 \quad \boxed{0,5}$$

b) En déduire l'aire du triangle AIM puis du quadrilatère BMJC.

Les triangles AIM et AJD sont semblables donc les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

$$\text{Les longueurs sont multipliés par } k = \frac{AI}{AJ} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

les aires sont donc multipliées par $k^2 = \frac{1}{5}$

$$\frac{\text{Aire (AIM)}}{\text{aire (AJD)}} = \frac{1}{5} \text{ donc Aire (AIM)} = \frac{\text{Aire (AJD)}}{5} = \frac{4}{5} \quad \boxed{1}$$

$$\text{Aire (BMJC)} = \text{Aire (ABCD)} - \text{Aire (ADJ)} - \text{Aire (ABI)} + \text{Aire (AIM)} = 4^2 - 4 - 4 + \frac{4}{5} = 8 + \frac{4}{5} = \frac{44}{5} \quad \boxed{0,5}$$

4 M, N, P, et q sont sur un cercle de centre O, les points A, P, O et Q sont alignés, les points A, M et n sont alignés. 6 points 1° Démontrer que dans la figure suivante les triangles AMQ et APN sont semblables.

Les angles inscrits \widehat{PQM} et \widehat{PNM} interceptent le même arc ils sont donc de même mesure.

$$\begin{cases} \widehat{AQM} = \widehat{PNA} \\ \widehat{MAQ} = \widehat{NAP} \end{cases} \text{ Les triangles AMQ et PNA ont deux angles de même}$$

mesure ils sont donc semblables. $\boxed{2}$

2° En déduire l'égalité $AM \times AN = AP \times AQ$.

Les triangles AMQ et APN sont semblables donc les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

$$\begin{cases} A \text{ et } A \text{ sont homologues} \\ M \text{ et } P \text{ sont homologues} \\ Q \text{ et } N \text{ sont homologues} \end{cases}$$

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AQ}{AN} \text{ donc } AM \times AN = AP \times AQ. \quad \boxed{1}$$

3° Démontrer que $AM \times AN = AO^2 - R^2$ ou R désigne le rayon du cercle.

$$AQ = AO + OQ = AO + R \text{ et } AP = AO - OP = AO - R$$

$$AM \times AN = AP \times AQ = (AO + R)(AO - R) = AO^2 - R^2. \quad \boxed{1}$$

4° Application :

Dans la figure ci-dessous, le cercle Γ est tangent aux côtés d'un carré de 6 cm de côté et C_1 est le milieu de [DC].

Calculer AM sachant que le carré ABCD a pour côté 6 cm dans ADN rectangle en N on a : $AN^2 = AD^2 + DN^2$

$$\text{donc } AN = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \quad \boxed{0,5}$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \quad \boxed{0,5}$$

$$AM \times AN = AO^2 - R^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2 = 9 \times 2 - 9 = 9$$

$$AM = \frac{9}{AN} = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \boxed{0,5}$$

