Devoir surveillé n°10

Exercice 1 (7 points) :

Soit un parallélogramme ABCD

1° Placer les points E, F et G tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Le but de l'exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que les droites (BE) et (FG) sont parallèles.

2° Méthode 1 : Avec les vecteurs

a) Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{FG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

c) Conclure

3° Méthode 2 : Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

a) Pour quelle raison $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est-il un repère du plan ?

b) Déterminer, sans justifier, les coordonnées de A, B, C et D.

c) Calculer les coordonnées de E, F et G.

d) Démontrer que les droites (BE) et (FG) sont parallèles.

Exercice 2 (9 points)

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

On considère les points A(– 1 ; 4), B(– 4 ; – 2), C(1 ; 0), D(4 ; 6) et E(3 ; 3).

1° Faire une figure.

2° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

3° Déterminer les coordonnées du point F, symétrique de B par rapport à C.

4° On admettra que F(6 ; 2).

Calculer les longueurs FD, FE et DE.

Quelle est la nature du triangle DEF ? Justifier la réponse.

5° Les points A, E et F sont-ils alignés ?

6° Déterminer les coordonnées des points H et G vérifiant :

$\overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} - 2\,\overrightarrow{BG} + 3\,\overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A (6 ; 3) , B (– 3 ; 0) , C (5 ; 4) et D (– 1 ; 1).

1° Montrer que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

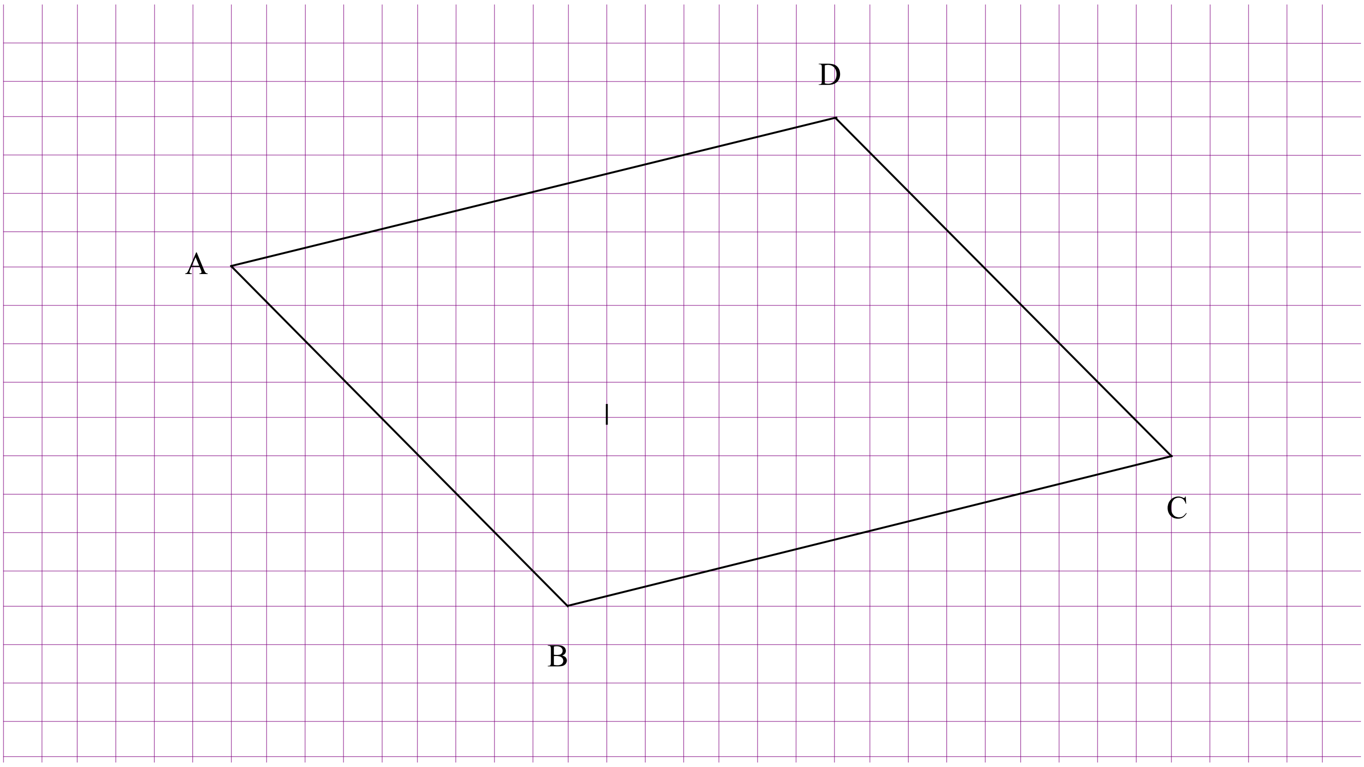
2° Les points B, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

3° Déterminer y tel que M (25 ; y) soit aligné avec les points A et B.

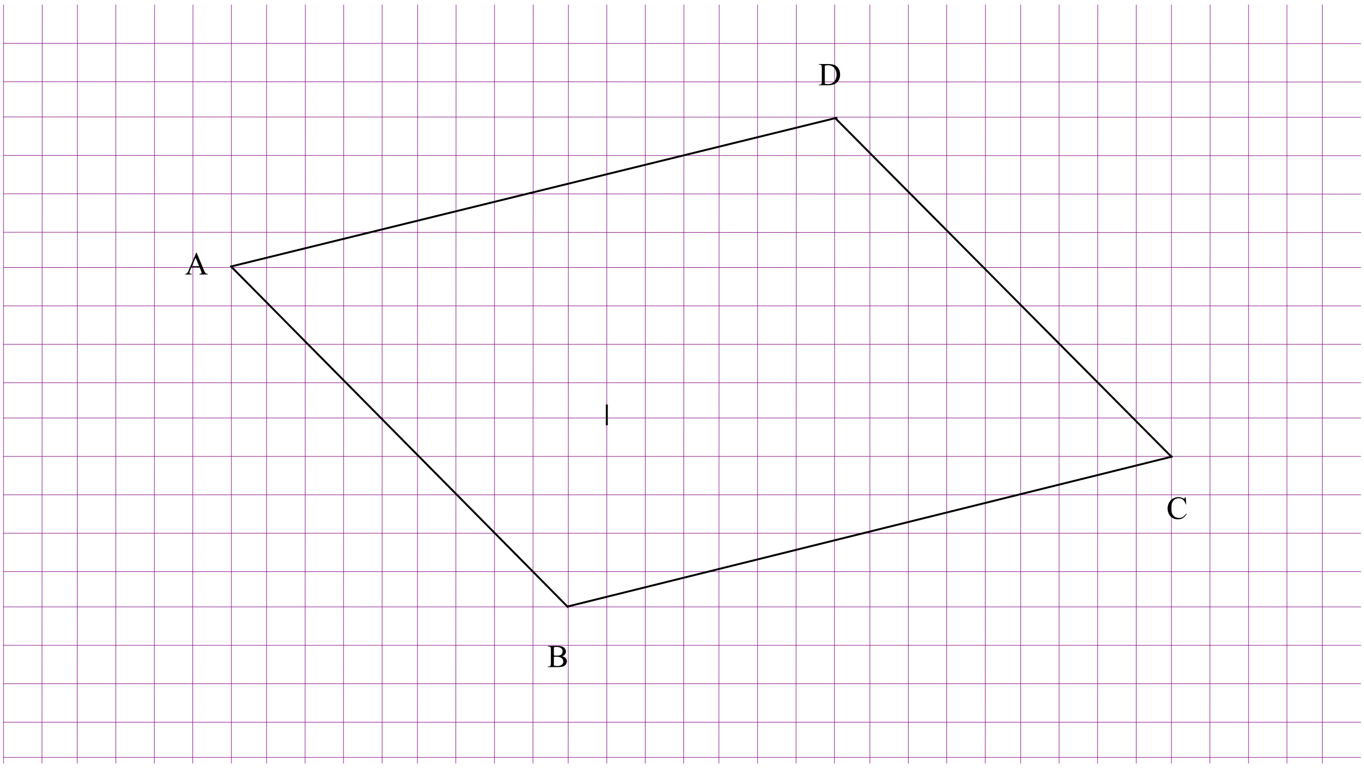
4° Soit E $\left(m , -\frac{1}{3}\right)$ où m est un réel.

Pour quelle(s) valeur(s) de m, le quadrilatère DOAE est-il un trapèze ?

Nom ____



Nom ____



Exercice 1 (7 points) :Soit un parallélogramme ABCD 1° Placer les points E, F et G tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ Le but de l'exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que les droites (BE) et (FG) sont parallèles. 2° Méthode 1 : Avec les vecteurs a) Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que $\overrightarrow{FG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

c) Conclure

$2\,\overrightarrow{BE} = -2\,\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $3\,\overrightarrow{FG} = -2\,\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

3° Méthode 2 : Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ a) Pour quelle raison $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est-il un repère du plan ?

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

b) Déterminer, sans justifier, les coordonnées de A, B, C et D.

A (0,0), B(1 , 0), C(1 , 1) et D(0 , 1)

c) Calculer les coordonnées de E, F et G .

$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} = 0\,\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$ donc $E\left(0\,,\frac{3}{8}\right)$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ (ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$) donc $F\left(1\,,\frac{3}{4}\right)$

Variante. Si $F(x\,,y)$ on a : $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$ $F\left(1\,,\frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $G\left(\frac{1}{3}\,,1\right)$

(ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$)

Variante. Si $G(x\,,y)$ on a : $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-\frac{2}{3} \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=1 \end{cases}$ $G\left(\frac{1}{3}\,,1\right)$

d) Démontrer que les droites (BE) et (FG) sont parallèles.

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 3/8-0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 1/3-1 \\ 1-3/4 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ 3/8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. On a : $-1 \times \frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires donc (BE) // (FG)

Exercice 2 (9 points) Soit (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan. On considère les points A(– 1 ; 4), B(– 4 ; – 2), C(1 ; 0), D(4 ; 6) et E(3 ; 3). 1° Faire une figure.

2° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4+1\\-2-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-4\\0-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD parallélogramme

3° Déterminer les coordonnées du point F, symétrique de B par rapport à C.

C est le milieu de [BF] on a donc $\overrightarrow{BF}=2\,\overrightarrow{BC}$

Si F(x , y) on a : $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x+4\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1+4\\0+2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BF}=2\,\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4=2\times5\\y+2=2\times2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10-4\\y=4-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$ donc F (6 ; 2)

4° On admettra que F(6 ; 2). Calculer les longueurs FD, FE et DE. Quelle est la nature du triangle DEF ? Justifier la réponse.

$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}4-6\\6-2\end{pmatrix}$ donc $FD=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}$. $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}3-6\\3-2\end{pmatrix}$ donc $FE=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3-4\\3-6\end{pmatrix}$ donc $DE=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$DE^2+FE^2=10+10=20=FD^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore DEF est rectangle en E

5° Les points A, E et F sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3+1\\3-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}6+1\\2-4\end{pmatrix}$. $4\times(-2)-(-1)\times7=-8+7\neq0$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, E et f ne sont pas alignés.

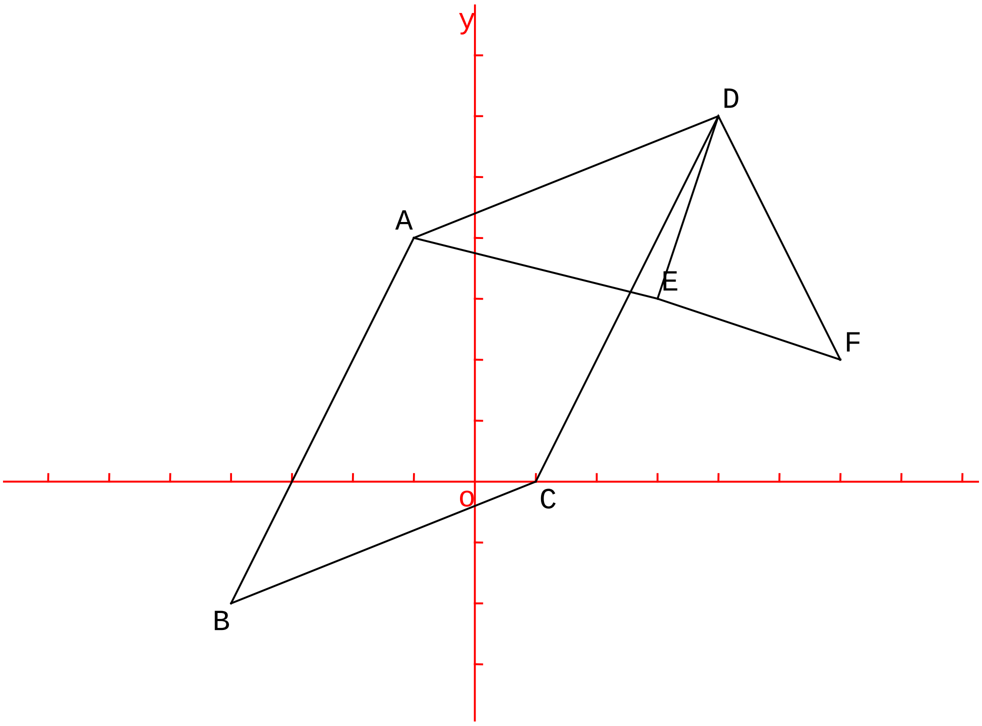
6° Déterminer les coordonnées des points H et G vérifiant :

$\overrightarrow{AH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}-2\,\overrightarrow{BG}+3\,\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.

Si H (x , y) on a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-3\times\frac{4}{3}\\y-4=-6\times\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4-1\\y=4-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=-4\end{cases}$

Si G (x , y) on a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}x+4\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AG}-2\,\overrightarrow{BG}+3\,\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x+1-2\,(x+4)+3\,(x-1)=0\\y-4-2\,(y+2)+3\,y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1-2\,x-8+3\,x-3=0\\y-4-2\,y-4+3\,y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\,x=10\\2\,y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$



Exercice 3 (4 points) Dans le plan muni du repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points : A (6 ; 3) , B (– 3; 0) , C (5; 4) et D (– 1; 1).

1° Montrer que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5+3\\4-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ On a : $6\times4-3\times8=24-24=0$ donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc (OA) // (BC)

2° Les points B, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1+3\\1-0\end{pmatrix}$ $8\times1-4\times2=0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ colinéaires donc B, C et D sont alignés.

3° Déterminer y tel que M (25 ; y) soit aligné avec les points A et B.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}25-6\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-6\\0-3\end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $(25-6)\times(0-3)-(-3-6)\times(y-3)=0$

c'est à dire $-57+9y-27=0$ c'est à dire $y=\frac{84}{9}=\frac{28}{3}$

4° Soit E $\left(m\ ,-\frac{1}{3}\right)$ où m est un réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m, le quadrilatère DOAE est-il un trapèze ?

DOAE est un trapèze si et seulement si $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{AE}$ colinéaires

$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}m-6\\-1/3-3\end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $-1\times\left(-\frac{10}{3}\right)-(m-6)=0$

$$-1\times\left(-\frac{10}{3}\right)-(m-6)=0\Leftrightarrow\frac{10}{3}-m+6=0\Leftrightarrow m=\frac{28}{3}$$