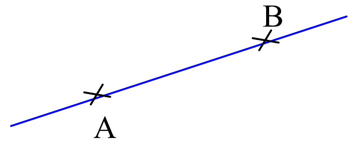
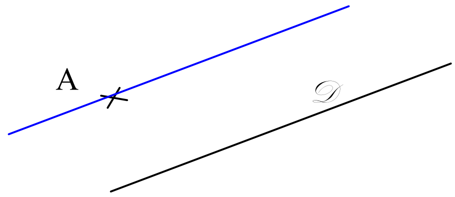
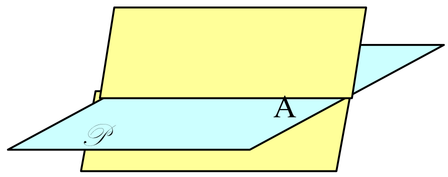
DROITES ET PLAN DE L'ESPACE

I DEFINIR UNE DROITE…UN PLAN

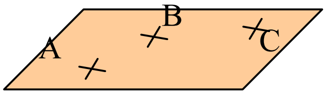
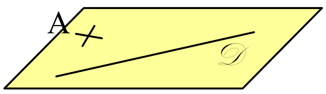
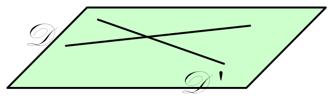
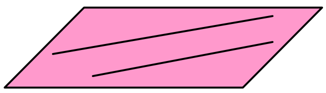
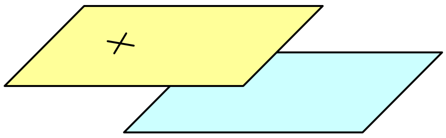
1° Droite

Une droite **de l'espace** est déterminée par la donnée.

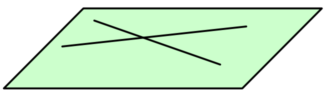
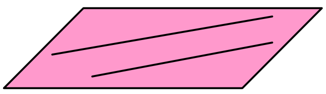
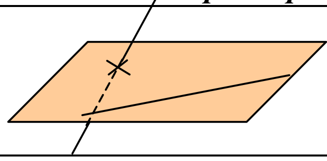
de deux points.	d'une droite et d'un point.	de deux plans.
		
On parle de la droite (AB).	Droite passant par A parallèle à $\mathscr{D}$.	Droite intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

2° plan

un **plan de l'espace** est déterminé indifféremment par la donnée :

de trois points non alignés	d'une droite et d'un point n'appartenant pas à cette droite.	de deux droites sécantes.
		
On parle du plan (ABC) ;	Plan passant par A contenant la droite $\mathscr{D}$.	Plan contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes.
de deux droites parallèles distinctes	d'un plan et d'un point.	
		
Plan contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ strictement parallèles.	Plan passant par A parallèle au plan $\mathscr{P}$.	

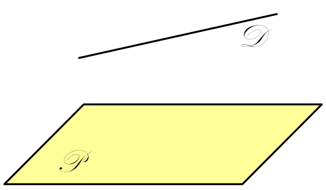
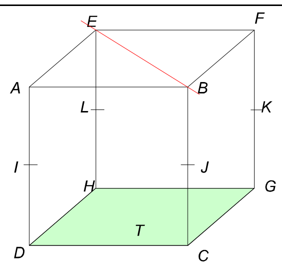
II INTERSECTION DE DEUX DROITES

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires		***$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires***
		
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes	**$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles** (éventuellement confondues)	**$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont ni sécantes ni parallèles**
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un et un seul point commun	$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont pas de point commun (Ou sont confondues)	

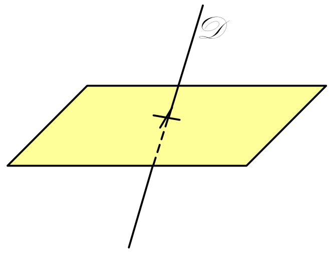
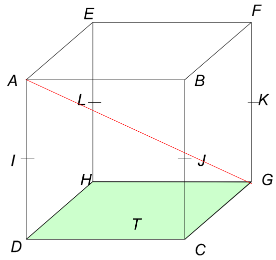
III INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

Dans l'espace, **une droite et un plan** peuvent :

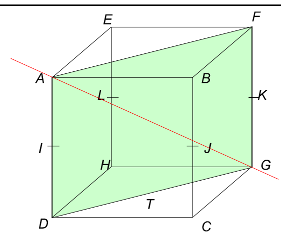
1° n'avoir aucun point commun (la droite est alors parallèle au plan) :

$\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$		 (EB) // (DCG)

2° avoir un point commun et un seul (la droite est sécante au plan) :

$\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{A\}$		

3° avoir plus d'un point commun dans ce cas la droite est contenue dans le plan :

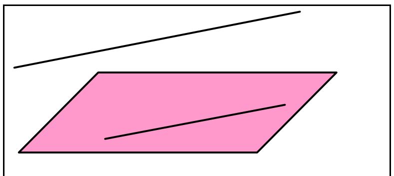
$\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \mathscr{D}$ quand $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$	$\left.\begin{array}{l} A \in \mathscr{P} \\ B \in \mathscr{P}' \end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \subset \mathscr{P}$	

4°Propriétés

si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.

si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle à au moins une droite de ce plan

Pour démontrer qu'une droite Δ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ il suffit de trouver une droite $\mathscr{D}$ contenue dans le plan $\mathscr{P}$ parallèle à la droite Δ



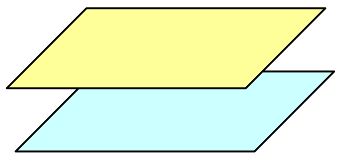
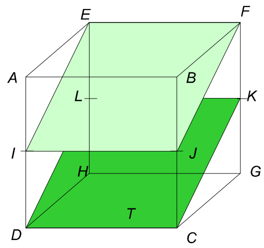
si $\left\{\begin{array}{l} \mathscr{D} \subset \mathscr{P} \\ \mathscr{D} // \Delta \end{array}\right.$ alors $\Delta // \mathscr{P}$

si $\Delta // \mathscr{P}$ alors il existe une droite $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ telle que $\Delta // \mathscr{D}$

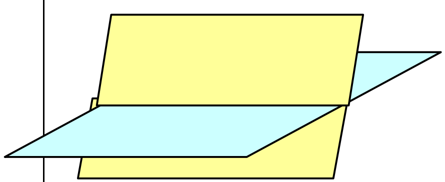
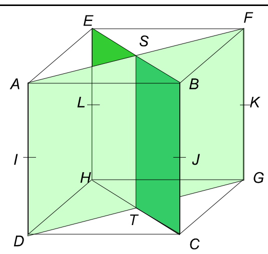
IV INTERSECTION DE DEUX PLANS

Dans l'espace, **deux plans** peuvent :

1° n'avoir aucun point commun, dans ce cas ils sont parallèles :

$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$		 (EIJ) // (DCK)

2° avoir un point commun dans ce cas ils sont sécants et leur intersection est une **droite** :

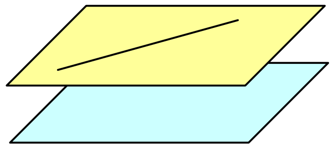
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{D}$		 (ADG) ∩ ((EBC) = (ST)

3° avoir trois points communs non alignés dans ce cas les plans sont confondus.

4° Propriètés

Si deux plans sont parallèles, toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre.

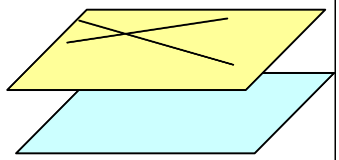
si $\begin{cases} \mathscr{P} // \mathscr{P}' \\ \mathscr{D} \subset \mathscr{P} \end{cases}$ alors $\mathscr{D} // \mathscr{P}'$



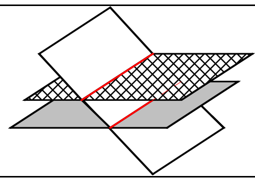
Si deux droites *sécantes* d'un plan sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.

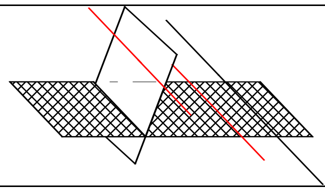
si $\begin{cases} \mathscr{D} \subset \mathscr{P} \\ \mathscr{D}' \subset \mathscr{P} \\ \mathscr{D} // \mathscr{P}' \\ \mathscr{D}' // \mathscr{P}' \end{cases}$ alors $\mathscr{P} // \mathscr{P}'$



Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles.

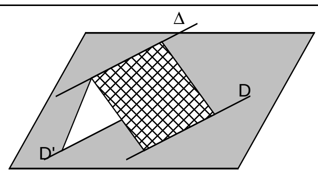


Si deux plans sécants sont parallèles à une même droite alors leur intersection est parallèle à cette droite



Théorème du toit

Si deux plans sécants passent par deux droites parallèles alors la droite d'intersection des deux plans est parallèle aux deux droites



III ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

1° Droites orthogonales

Définition Deux droites sont **orthogonales** si et seulement si il existe une droite qui est perpendiculaire à l'une et parallèle à l'autre

Remarque : ***deux droites orthogonales sont perpendiculaires si et seulement si elles sont coplanaires (Elles sont alors sécantes)***

Théorème 1

Si deux droites sont parallèles toute droite **orthogonale** à l'une est **orthogonale** à l'autre

Attention Si deux droites sont orthogonales à une même troisième elles ne sont pas forcément parallèles

2° Droite orthogonale à un plan

Définition Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **toutes** les droites du plan

Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à **deux** droites **sécantes** du plan

Remarques

Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes droites du plan.

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan

Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est sécante à ce plan

Théorème 1

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite ils sont parallèles entre eux

Si deux plans sont parallèles alors toutes droites orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre

Théorème 2

Si deux droites sont orthogonales à un même plan elles sont parallèles entre elles

<u>3° Plan médiateur</u>

Définition

Soit A et B deux points distincts de l'espace. On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu de [AB]

Théorème

Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B

<u>4° Projections orthogonales</u>

Sur une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite et M un point Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$ est le point M' défini par :

Si $M \in \mathscr{D}$ alor' M' = M

Si $M \notin \mathscr{D}$ alors M' est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M

Sur un plan

Soit $\mathscr{P}$ une plan et M un point Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est le point M' défini par :

Si $M \in \mathscr{P}$ alors M' = M

Si $M \notin \mathscr{P}$ alors M' est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec la droite à orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M